Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones):
Apuntes de 2008-09, Parte I
Modelo de examen - soluciones

Preguntas de tipo test.

---

1. La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$$

es igual a:

(A) $4/3$, (B) 6, $\boxed{\text{(C)}}$ 12, (D) 3, (E) ninguno de los anteriores.

Solución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = 12 \qquad (\text{serie geométrica con } \ q = 2/3)\,.$$

---

2. De entre las siguientes integrales impropias:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx\,, \qquad J = \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x}dx\,, \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}}dx$$

convergen

(A) sólo I y J ; (B) sólo J y K ; $\boxed{\text{(C)}}$ sólo I y K ; (D) todas ; (E) ninguna.

Solución.

$$\frac{x}{x^3+1} \sim \frac{1}{x^2}\,, \quad x \to \infty\,; \qquad \frac{\log x}{x} \ge \frac{1}{x} \quad (x \ge e)\,; \qquad \frac{x}{e^{2x}} \le \frac{1}{e^x}\,.$$

Para la convergencia de la primera integral, usamos el *criterio asintótico de convergencia de integrales impropias* y, para la divergencia de la segunda y la convergencia de la tercera, el *criterio de comparación*. Así mismo, conviene recordar que las integrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x}dx$ convergen, mientras que $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

---

3. De las series infinitas

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}\,, \qquad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}\,,$$

podemos afirmar lo siguiente:

$\boxed{\text{(A)}}$ S converge condicionalmente y σ absolutamente, (B) divergen, (C) convergen absolutamente, (D) ambas convergen condicionalmente, (E) S diverge y σ converge absolutamente.

Solución. La serie S es alternada y converge por el *criterio de Leibniz* pero no converge absolutamente al ser la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ comparable con la *serie armónica* $\sum_n \frac{1}{n}$ y, por tanto, divergente. La serie σ converge absolutamente debido a la desigualdad $|\frac{\cos n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ y a la convergencia de la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$, aplicando el *criterio de comparación*.

---

4. El conjunto de todos los valores posibles de $\log(\sqrt{3}+i)$ está formado por

(A) $\log 2 + \frac{\pi i}{3}$, (B) $\log 2 + \frac{\pi i}{6}$, $\boxed{\text{(C)}}$ $\log 2 + \frac{\pi i}{6} + 2\pi n i$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$,

(D) $\log 2 + \frac{\pi i}{3} + 2\pi n i$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$, (E) no es ninguno de los anteriores.

Solución. La representación polar de $\sqrt{3}+i$ es $\sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) = 2e^{\pi i/6}$, luego

$$\log(\sqrt{3}+i) = \log 2 + \frac{\pi i}{6} + 2\pi n i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

---

5. Sea $-1 < x < 1$. La suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

es igual a:

(A) $\log \frac{1}{1-x}$, (B) $\frac{1}{1+x}$, $\boxed{\text{(C)}}$ $\frac{1}{(1-x)^2}$, (D) $\frac{1}{1-x}$, (E) ninguno de los anteriores.

Solución. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

---

6. El valor $B(n,n)$ de la función Beta es:

(A) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (B) $\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)^2}$, (C) $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$, $\boxed{\text{(D)}}$ $\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$, (E) otro.

Solución. Basta recordar que $B(n,n) = \frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(2n)}$ y $\Gamma(m) = (m-1)!$.

---

7. La función compleja:

$$f(z) = \cos x\,(e^y + e^{-y}) + i \operatorname{sen} x\,(e^{-y} - e^y)\,, \qquad z = x + iy\,,$$

cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los siguientes puntos del plano:
(A) en todo $z \neq 0$, (B) en ninguno, (C) sólo en $z = 0$,
(D) sólo para z real, $\boxed{\text{(E)}}$ en todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución. Las ecuaciones (C-R) se cumplen en todo $z = x + yi$ puesto que

$$u_x = -\operatorname{sen} x(e^y + e^{-y}) = v_y\,, \qquad v_x = \cos x(e^{-y} - e^y) = -u_y\,.$$

---

8. El valor del límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z - \frac{z^2}{2}}{z^4}$$

es:

$$\text{(A) } \infty\,, \qquad \text{(B) } \frac{1}{24}\,, \qquad \text{(C) } \frac{1}{12}\,, \qquad \text{(D) } 0\,, \qquad \boxed{\text{(E)}}\ -\frac{1}{24}.$$

Solución. Puede aplicarse L'Hopital tres veces seguidas y recordar que $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$, o aplicar L'Hopital 4 veces consecutivas.

---

9. La parametrización $z = 3 + e^{-2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$, representa la siguiente curva en el plano:

$\boxed{\text{(A)}}$ una circunferencia orientada en el sentido negativo; (B) una recta; (C) un segmento; (D) una circunferencia orientada en el sentido positivo; (E) una semi-circunferencia.

Solución. Todo punto z en la curva cumple $|z-3| = |e^{-2\pi i t}| = 1$, luego z siempre pertenece a la circunferencia $|z-3| = 1$. Además, cuando t recorre el intervalo $[0,1]$, el valor $-2\pi t$ recorre el intervalo $[0, -2\pi i]$ desde $-2\pi i$ hasta 0. Por tanto, el punto z recorre toda la circunferencia indicada y en el sentido negativo.

---

10. Sea γ la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación <u>negativa</u>. El valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-4}$$

es:

$\boxed{\text{(A)}}$ $0\,,$ (B) $2\pi i\,,$ (C) $-2\pi i\,,$ (D) $1\,,$ (E) ninguno de los anteriores.

Solución. La función $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ es holomorfa en el conjunto abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2, -2\}$. Tanto la cirunferencia unidad γ como su dominio interior están contenidos en Ω (es decir, la curva γ no rodea ninguna singularidad de f), luego podemos aplicar el Teorema integral de Cauchy para concluir que el valor de la integral es cero.

---

11. Dada la función f, definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 2, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

su serie de Fourier converge al valor de $f(x)$ para los siguientes valores de x en el intervalo $(-\pi, \pi)$:

(A) para todo $x \neq 0,\ 2$; $\boxed{\text{(B)}}$ para todo $x \neq 0$; (C) para todo $x \neq \pm\pi/2$; (D) para todo x en el intervalo; (E) para todo $x \neq 0,\ \pm\pi/2$.

Solución. La función f es C^1 a trozos, ya que sólo es discontinua en el punto 0 y continua en los demás puntos del intervalo abierto $(-\pi, \pi)$, ahí tiene límites laterales finitos y lo mismo ocurre con la derivada f'

(que no existe en $x = 0$ y es nula en todos los demás puntos del intervalo). Por tanto, según el teorema básico de convergencia para las series de Fourier, la serie de Fourier $Sf(x)$ de f converge a $f(x)$ en todo punto $x \neq 0$, mientras que en ese punto converge al valor medio de los limites laterales:

$$Sf(0) = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \neq 2 = f(0)\,.$$

---

12. Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$, el residuo en su único polo en el semiplano superior es:

(A) 0, $\boxed{\text{(B)}}$ $\dfrac{-i}{32}$, (C) $-2\pi i$, (D) $\dfrac{i}{16}$, (E) ninguno de los anteriores.

Solución. Los polos de f son $2i$ y $-2i$, ambos dobles; sólo el primero está en el semiplano superior y el residuo correspondiente es

$$Res(f; 2i) = \lim_{z\to 2i} \left((z-2i)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 2i} \left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)' = \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{-i}{32}\,.$$

---

13. En este problema conviene usar alguna de las siguientes fórmulas, vistas en clase:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Sabiendo que f es una función continua en $\mathbb{R}$, periódica con periodo 2π y con los siguientes coeficientes de Fourier:

$$a_0 = 1\,, \quad a_n = \frac{1}{n^2}\,, \quad b_n = 0\,, n \geq 1\,.$$

concluimos que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx =$

$\boxed{\text{(A)}}$ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^4}{90}$, (B) $1 + \dfrac{\pi^4}{90}$, (C) $\dfrac{\pi^4}{90}$, (D) $\dfrac{\pi^2}{6}$, (E) $1 + \dfrac{\pi^2}{6}$, (F) ninguno de los anteriores.

Solución. Puesto que f es continua y periódica con periodo 2π, aplicando la *fórmula de Parseval*, obtenemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi^4}{90}\,.$$

---

14. La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2 \cos z}$ tiene en $z = 0$:

$\boxed{\text{(A)}}$ un polo simple; (B) una polo doble; (C) una singularidad evitable;
(D) una singularidad esencial; (E) no tiene una singularidad ahí.

Solución.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 \cos z} = \frac{\operatorname{sen} z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z} \cdot \frac{1}{z}\,.$$

Los dos primeros factores tienen límite finito cuando $z \to 0$ y, por tanto, una singularidad aislada ahí. Luego podemos considerar que $f(z) = \dfrac{g(z)}{z}$ donde la función

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z}$$

es holomorfa en un disco pequeño centrado en el origen; por tanto, $z = 0$ es un polo simple de f.

Ejercicios de desarrollo.

---

15. [10 puntos]

Hallar la transformada de Fourier, $\hat{f}(s)$ de la función $f(x) = \dfrac{1-ix}{1+x^2}$. Conviene recordar que f es la transformada de Fourier de la función

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases} .$$

Solución. Puesto que $f = \hat{u}$, por la *Fórmula de inversión de Fourier*, sabemos que

$$\hat{f}(s) = \hat{\hat{u}}(s) = 2\pi u(-s) = 2\pi \begin{cases} e^{s}, & \text{si } -s \geq 0 \\ 0, & \text{si } -s < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi e^{s}, & \text{si } s \leq 0 \\ 0, & \text{si } s > 0 \end{cases} .$$

---

15. [10+10=20 puntos]

Sea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ la circunferencia unidad, orientada positivamente, y sea

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos t} .$$

(a) Parametrizando γ de manera adecuada, demuéstrese que

$$I = i \int_\gamma \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} .$$

(b) Aplicando los resultados apropiados sobre la integración compleja, calcúlese el valor exacto de I.

Solución. Como es habitual, parametrizamos la circunferencia unidad escribiendo $z = e^{it}$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$, así que $dz = ie^{it}\, dt$, luego $dt = \dfrac{dz}{iz}$. Además, recordando que $|z| = 1$ significa que $|z|^2 = z\overline{z} = 1$, sabemos que

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z} .$$

Por tanto, nuestra integral se convierte en la siguiente integral de línea:

$$I = \int_\gamma \frac{1}{5 - \frac{2z^2+2}{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{dz}{5z - 2z^2 - 2} = i \int_\gamma \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} .$$

Puesto que las únicas soluciones de la ecuación cuadrática $2z^2-5z+2=0$ son $z=2$ y $z=\frac{1}{2}$, factorizamos el denominador como $2z^2-5z+2=2(z-2)(z-\frac{1}{2})$. Por tanto,

$$I = i\int_\gamma \frac{dz}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{F(z)}{z-\frac{1}{2}}\,.$$

Teniendo en cuenta que $F(z) = \frac{1}{z-2}$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{2\}$ y que tanto γ como su dominio interior $D_{int}(\gamma)$ están contenidos en Ω (es decir, γ no rodea la singularidad de F), la *Fórmula integral de Cauchy* implica que

$$I = \frac{i}{2}\cdot 2\pi i F(\frac{1}{2}) = -\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{2\pi}{3}\,.$$