Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 8 DE PROBLEMAS

Series de Fourier

1. ¿Cuál de las sigiuentes funciones es C^1 a trozos en $[-\pi,\pi]$? Identificar todos los puntos donde no son continuas o no tienen derivada y hallar los límites laterales, tanto de la función como de su derivada, en dichos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < \pi/2 \\ 0, & \text{si } \pi/2 \le |x| \le \pi \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{si } |x| = \pi \end{cases} .$$

2. (a) Esbozar la gráfica de la función f definida por $f(x) = |x|$ para $-\pi \le x < \pi$ y periódica con periodo 2π en $\mathbb{R}$.

(b) Escribir la fórmula exacta para $f(x)$ para $x \in [3\pi, 5\pi]$ y para $-3\pi \le x \le \pi$.

(c) Calcular la serie de Fourier de f y determinar todos los puntos en los que converge a $f(x)$.

(d) Finalmente, deducir la identidad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Extender la función $f(x) = x$, para $0 \le x < 2\pi$, de manera que sea periódica con periodo 2π en $\mathbb{R}$. ¿Es f par o impar? Calcular la serie de Fourier $Sf(x)$ y estudiar su convergencia.

4. Hallar la forma compleja de la serie de Fourier de la función f, definida por $f(x) = e^{-2x}$ para $-\pi < x \le \pi$ y periódica con periodo 2π en $\mathbb{R}$. Analizar la convergencia de $Sf(x)$.

5. Usando algún desarrollo ya obtenido antes y el teorema de Parseval, calcular la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.

Transformada de Fourier

6. Comprobar que la función u dada abajo es C^1 a trozos y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$:

$$u(t) = \begin{cases} t, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

y luego calcular su transformada de Fourier por definición.

7. Dada la función

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si } t > 0, \\ e^{t}, & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

(a) escribir de manera unificada (sin llaves) la fórmula para $u(t)$, $t \neq 0$;

(b) comprobar que u es una función C^1 a trozos y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$;

(c) calcular su transformada de Fourier.

8. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

usando la fórmula de inversión de Fourier.

9. $(*)$ Demostrar que la transformada de Fourier de la función

$$u(t) = e^{-t^2}$$

(para la que ya sabemos que es integrable) viene dada por

$$\widehat{u}(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$$

usando el método de integración por contornos y eligiendo un contorno rectangular apropiado.