Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 7 DE PROBLEMAS

Generalizaciones de la fórmula integral de Cauchy. Residuos. Aplicaciones

1. Sea Γ la circunferencia $\{z : |z| = 2\}$ con la orientación negativa. Calcular las siguientes integrales:

$$I = \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}^2 z\, dz}{z^2}, \qquad J = \int_\Gamma \frac{\cos z\, dz}{(z-i)^2}.$$

2. Determinar el tipo de singularidad que tiene la función f dada en el punto indicado:

(a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^4+1}$, $z = i$;

(b) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $z = 0$.

Si se trata de una singularidad evitable, explicar por qué lo es; si se trata de un polo, determinar su orden.

3. Identificar todos los polos y determinar su orden, para cada una de las funciones dadas.

$$\text{(a)}\ \frac{e^z}{(z^2+1)^3(z-3)^2}, \qquad \text{(b)}\ \frac{z^4-2z^2+1}{(z-1)^2}.$$

4. Determinar el residuo de la función f en cada uno de sus polos, usando la fórmula vista en clase:

$$\text{(a)}\ f(z) = \frac{z-1}{z^2+1}, \qquad \text{(b)}\ f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

5. Para la función $f(z) = \operatorname{tg} z$, determinar el orden del polo en $z = \pi/2$ y el residuo $\operatorname{Res}(f, \pi/2)$.

6. Sea γ la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$, orientada en el sentido positivo. Usando el teorema de los residuos (u otro método adecuado), calcúlense las integrales

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad J = \int_\gamma \frac{dz}{z^2(z-2)},$$

justificando la respuesta detalladamente.

7. Demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos^2 t} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}},$$

expresando $\cos t$ como función de z en la circunferencia unidad $\{z\colon |z| = 1\}$ y usando el teorema de los residuos.

8. (a) Compruébese que convergen las integrales

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}\,, \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$$

(b) Calcúlense los valores de I y J.

Sugerencia: integrar las funciones apropiadas de z sobre el contorno $\gamma_R = I_R + C_R$, compuesto por el intervalo $I_R = [-R, R]$ y por la semi-circunferencia C_R de radio $R > 2$ centrada en el origen, desde R hasta $-R$.

9. Por el mismo método, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = \pi\,.$$

10. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2}\,, \qquad \alpha\,, \beta > 0\,,$$

integrando la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

a lo largo del mismo contorno γ_R que en los ejercicios anteriores.

Conviene usar (sin demostrarlo) el siguiente resultado, conocido como el *Lema de Jordan*: si $\alpha > 0$, P y Q son dos polinomios de grados m y n respectivamente y $n - m \geq 1$, entonces

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \to 0 \qquad \text{cuando} \quad R \to \infty\,.$$

11. Utilizar él método del ejercicio anterior para comprobar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e} \operatorname{sen} 1\,.$$