Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Curvas y sus parametrizaciones. Integrales de línea complejas

1. Escribir una trayectoria que represente el segmento $[2+i,-1]$ como función $\gamma\colon [0,1] \to [2+i,-1]$

(a) con el punto inicial en $2+i$ y el punto terminal en -1;

(b) con el punto inicial en -1 y el punto terminal en $2+i$.

2. (a) Escribir dos parametrizaciones simples de la circunferencia de centro i y radio 2, una con la orientación positiva como función $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ y otra con la orientación negativa, $\gamma^-\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$.

(b) Comprobar que ambas son curvas C^1, simples y cerradas.

(c) Luego escribir otra parametrización de γ, equivalente a la elegida e el apartado a), partiendo del intervalo $[0,1]$ en lugar de $[0,2\pi]$.

3. Usando la definición, calcúlense las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_\gamma z dz$, donde γ es la semi-circunferencia que pasa por el punto -1, desde i hasta $-i$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma e^z dz$, donde γ es el intervalo $[0,a]$ desde el origen hasta un punto $a \in \mathbb{C}$ arbitrario.

Teorema y fórmula integral de Cauchy

4. Utilizando o bien la fórmula integral de Cauchy o bien el teorema de Cauchy, evaluar las siguientes integrales, indicando qué teorema se está usando y comprobando las hipótesis que permitan su uso.

$$\int_{|z-3|=7} e^{-8z^2} dz\,, \qquad \int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2i)^2} dz\,, \qquad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-e)} dz\,, \qquad \int_{|z-2i|=2} \frac{\cos z}{z^2+1} dz\,.$$

(Todas las circunferencias en este ejercicio tienen orientación positiva.)

5. Calcúlese $\displaystyle\int_\gamma \frac{2}{z^2-1} dz$, donde γ es la circunferencia $\{z : \ |z| = 2\}$, con la orientación positiva, utilizando las fracciones parciales (simples).

6. Usando la fórmula

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad \text{donde} \quad z = e^{it}\,,$$

demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \operatorname{sen} t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

7. ($*$) Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2x) dx$, integrando la función $f(z) = e^{-z^2}$ sobre el rectángulo con los vértices 0, R, $R+i$, i. (Conviene recordar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.)