Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 5 DE PROBLEMAS

Conjuntos abiertos

1. Decídase si los siguientes conjuntos en el plano son abiertos o no:

$$\Omega = \{z = x + iy : \ -\pi/2 < y < \pi/2\}, \qquad \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : \ z \neq 0, 1\}.$$

2. Verificar que ninguno de los conjuntos

$$B = \{z = x + iy : \ -\pi/2 < y \leq \pi/2\}, \qquad D = \{z : \ |z| \leq 1\}$$

es abierto.

La derivada compleja. Funciones holomorfas (diferenciables)

3. Deducir, utilizando la definición, la fórmula para la derivada de $f(z) = 1/z^2$.

4. Usando las reglas básicas, hállense las derivadas de las funciones

$$f(z) = \frac{5z+2}{\cos z + 1}, \qquad g(z) = (z^3+1)\cdot e^{-4z}.$$

Determinar dónde están definidas las funciones.

5. En el caso cuando $\lim_{z\to a} f(z) = 0 = \lim_{z\to a} g(z)$ y f y g son funciones complejas derivables en un disco $D(a,r)$, se pide encontrar un razonamiento intuitivo que demuestre la regla de L'Hopital:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(si el límite a la derecha existe y es finito), utilizando la definición de la derivada.

6. Calcular los límites

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z}, \qquad \lim_{z\to 1} \frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z^2-1}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}{z^4}.$$

7. (a) Determinar en qué puntos del plano tiene derivada la función $f(z) = |z|^2$ y hallar el valor de $f'(z)$ en esos puntos, si procede.

(b) Lo mismo para la función $g(x+yi) = (xy + x^2) + ix$.

8. Compruébese que la función $f(z) = \sqrt{z}$, definida como en clase como función continua para los z distintos de los números reales $x \leq 0$, es, de hecho, holomorfa. Conviene recordar que la fórmula es $f(re^{it}) = \sqrt{r}e^{it/2}$, $-\pi < t < \pi$.