Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Series de Taylor reales - ampliación

1. Aplicando las fórmulas básicas vistas en clase, desarrollar en serie de Maclaurin las funciones

$$f(x) = (1 + \frac{x}{3})^{5/2}\,, \qquad g(x) = \cos(3x)\,, \qquad h(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,, \qquad F(x) = \operatorname{sen}^2 x\,.$$

Indicar el radio de convergencia de cada una de ellas.

2. Desarrollar la función dada en serie de Taylor alrededor de un punto $x = c$ convenientemente elegido:

$$\cos(x-2)\,, \qquad e^{5x-1}\,, \qquad \frac{1}{4x+3}\,.$$

Indicar el valor de c correspondiente a cada uno de los casos.

3. (a) Hallar el intervalo en el que está definida la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(b) Luego calcular la derivada $f'(x)$ en dicho intervalo y usar la conclusión obtenida para determinar la función $f(x)$ explícitamente.

4. Comprobar que la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ cumple la ecuación

$$f'(x) = 2xf(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

¿De qué función se trata?

5. Desarrollar en serie de Maclaurin cada una de las funciones *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico*, definidas como

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Comprobar que $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ y $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$:

(1) directamente;

(2) derivando las series obtenidas.

6. Integrando la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\,, \qquad |x| < 1\,,$$

obtener el desarrollo de la función $\log(1+x)$ como serie de potencias en el intervalo $(-1, 1)$ ya establecida en clase.

Obtener también el desarrollo de Maclaurin de la función $(x+1)\log(x+1) - x$, integrando una vez más.

Funciones complejas elementales

7. Compruébense las siguientes propiedades de la función exponencial:

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}\,, \qquad e^z \cdot e^w = e^{z+w}\,, \qquad (e^z)^n = e^{nz} \quad (z \in \mathbb{Z})\,.$$

8. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas:

$$\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z}\,, \qquad \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1\,.$$

9. Compruébense las siguientes identidades para las funciones complejas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y\,, \qquad \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w\,.$$

10. Demostrar que sen $z = 0$ si y sólo si $z = \pi n$, $n = 0$, ± 1, ± 2,... ¿Cuál es el resultado análogo para la función coseno? (Esto quiere decir que, al extender las funciones seno y coseno al plano complejo no hemos obtenido nuevos ceros.)

11. Simplificar los valores

$$|e^{2-5i}|\,, \qquad e^{\log 3+i}\,, \qquad e^{\log 2+\frac{\pi}{3}i}\,.$$

Los logaritmos de los números positivos que aparecen arriba son los logaritmos reales habituales.

12. Hallar todos los valores (complejos) de

$$\log(-e)\,, \qquad \log(1+i)\,, \qquad (1+i)^i\,, \qquad 2^{-1-i}\,, \qquad i^{\pi}\,.$$

13. Comprobar que los tres valores de la raíz cúbica $\sqrt[3]{z}$ definidos antes, coinciden con los valores de $z^{1/3} = e^{(\log z)/3}$, que también son tres.