Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

HOJA 3 DE PROBLEMAS - **Series infinitas - repaso y ampliación**

1. Escríbanse los cinco primeros términos de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}\,.$$

2. Escribir la fórmula más sencilla posible del término n-ésimo, a_n, de las siguientes series:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots\,, \qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\dots\,, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\dots$$

3. Hallar las sumas de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n^2-1}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\,, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-2)}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}\,.$$

4. Sumar las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2}e^{-n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (3\cdot(0'2)^n+(-0'8)^n)\,,$$

justificando previamente su convergencia.

5. Escríbase el siguiente número decimal como cociente de dos números naturales:

$$(a)\ 0,88888\dots\,, \qquad (b)\ 0,090909\dots\,, \qquad (c)\ 3,0154545454\dots\,.$$

6. ¿Para qué valores reales de x converge la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x+1}{4}\right)^n$?

7. Utilizando el criterio del término general, decidir si son convergentes o no las series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{3n-1}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos^2(\pi n)}{n+1}\,.$$

8. Decídase la convergencia de cada una de las series dadas, usando el criterio de comparación en alguna de sus formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2n+2009}\,,$$

dando por hecho que divergen las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

9. Basándose en el conocimiento de las series geométricas y de los límites básicos de las funciones trigonométricas, usar alguna forma del criterio de comparación para decidir la convergencia o divergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

10. (a) Usando el criterio integral, demostrar que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n/2}$.

(b) Usar el apartado (a) para decidir la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+10}{\pi^{n/3}-1}$.

11. Usando el criterio integral (y justificando todos los pasos), hállense todos los valores de p para los que converja la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^p n}$.

12. Usando el test del cociente de d'Alembert o el criterio de la raíz, determinar si son convergentes o no las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{5n+1}\right)^{n/2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

13. Decidir si las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n^2+3)}{n^2+1}$, $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-3n}$ convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

14. Hágase lo mismo para las series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n}$.

15. ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$ una serie alternada o no? Explíquese la respuesta.

Series de potencias (reales). Desarrollos de algunas funciones sencillas

16. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n!)^3}, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+\pi)^n$$

y su convergencia en los extremos del intervalo de convergencia (donde eso tenga sentido).

17. Lo mismo para las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n5^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\log(n+1)}$.

18. Aplicando los conocimientos de las series geométricas y de las fracciones parciales (simples) si fuese necesario, desarrollar en serie de Maclaurin o de Taylor las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad g(x) = \frac{3}{2+x}, \qquad h(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$$

e indicar razonadamente el intervalo de convergencia de cada una.