Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

EXAMEN FINAL, 22 de junio de 2009

HOJA DE RESPUESTAS

RESPUESTAS

Primera Parte

Modelo 1

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 13	P. 14
Resp.	E	B	A	C	C	B	E	C	D	B	B	B	B	E

Modelo 2

Probl.	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 13	P. 14
Resp.	C	B	C	D	E	B	E	B	D	D	B	E	C	B

Segunda Parte

15. Se cumple $\hat{u}(x) = \pi e^{-|x|} = \pi f(x)$. Aplicando de nuevo la transformada de Fourier, obtenemos

$$\hat{\hat{u}}(s) = \pi \hat{f}(s)\,.$$

[Hasta aquí, 2 puntos.]
Por otra parte, según la Fórmula de Inversión de Fourier,

$$\hat{\hat{u}}(s) = 2\pi u(-s)\,.$$

[Otros 5 puntos, si se ha mencionado la F.I.F. y sólo 3 si no.]
Se sigue que $\pi \hat{f}(s) = 2\pi u(-s)$ y, por tanto,

$$\hat{f}(s) = 2u(-s) = \frac{2}{1+s^2}\,.$$

[Otros 3 puntos para esta operación final.]

16.

(a) La función

$$\frac{1}{(z+3i)(z^2+1)} = \frac{1}{(z+3i)(z+i)(z-i)}$$

tiene, obviamente, tres polos simples: $z = i$, $z = -i$, $z = -3i$. Los dos primeros tienen módulo uno y el tercero, módulo 2, con lo cual los dos primeros están dentro del contorno Γ mientras que el último está fuera. [2 puntos]

Por el Teorema de los Residuos, obtenemos que

$$I = \int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, (\mathrm{Res}(f; i) + \mathrm{Res}(f; -i))$$

y sólo nos queda calcular esos residuos. [4 puntos, sólo 2 si no se ha mencionado el T.R.]

Por la fórmula vista en clase para el residuo en un polo simple,

$$\mathrm{Res}(f; i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+3i)(z+i)} = \frac{1}{8i^2} = -\frac{1}{8}\,.$$

De manera similar,

$$\mathrm{Res}(f; -i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z+3i)(z-i)} = \frac{1}{-4i^2} = \frac{1}{4}\,.$$

[3 puntos, sólo 2 si hay un error aritmético pequeño en uno de los dos cálculos.]

Finalmente,

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi i}{4}\,.$$

[1 punto.]

(b) (Este problema ya fue propuesto en uno de los exámenes de los años anteriores, además de aparecer algo similar en los apuntes.)

La función

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$$

es holomorfa en todo $z \neq 0$ y, por tanto, tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Dicho punto, obviamente, está dentro de la curva γ puesto que tiene módulo menor que uno. Además, la singularidad es evitable. Lo sabemos porque

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Esto se ve fácilmente, o bien por L'Hopital o bien considerando el desarrollo del coseno en serie de Taylor. [Hasta aquí, 4 puntos.]

Por tanto, a todos los efectos podemos considerar la función f como si fuera holomorfa en todo el plano. Por el Teorema Integral de Cauchy, se sigue que

$$\int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z^2} dz = 0\,.$$

[6 puntos.]

<u>Solución alternativa</u>. Otra manera de ver esto sería, por ejemplo, aplicando a la función $f(z) = \cos z - 1$ la fórmula integral de Cauchy para la derivada de primer orden en $z = 0$:

$$\int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z^2} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i(-\operatorname{sen} 0) = 0\,.$$