

Primera Parte

Las preguntas 1-14 son de tipo test.

Puntuación. Respuesta correcta: 5 puntos, incorrecta o doble: -1 punto, en blanco: 0 puntos.

1. El radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e^{-2n}x^n$$

es igual a:

- (A) $+\infty$, (B) 1, (C) e^2 , (D) $\frac{1}{e}$, (E) ninguno de los anteriores.

2. De entre las siguientes integrales impropias:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx, \quad J = \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x^3} dx, \quad K = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

convergen

- (A) sólo I y K ; (B) sólo J y K ; (C) sólo I y J ; (D) todas; (E) ninguna.

3. De las series infinitas

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{n^{3/2}},$$

podemos afirmar lo siguiente:

- (A) convergen absolutamente, (B) divergen, (C) S converge condicionalmente y σ absolutamente, (D) ambas convergen condicionalmente, (E) S diverge y σ converge absolutamente.

4. El conjunto de todos los valores posibles de $\log(1 - \sqrt{3}i)$ está formado por

- (A) $\log 2 - \frac{\pi i}{6}$, (B) $\log 2 - \frac{\pi i}{3}$, (C) $\log 2 - \frac{\pi i}{6} + 2\pi ni$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,
(D) $\log 2 - \frac{\pi i}{3} + 2\pi ni$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, (E) ninguno de los anteriores.

5. La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n+1}}$$

es igual a:

- (A) $3/2$, (B) 2, (C) 3, (D) $2/3$, (E) la serie es divergente.

6. Denotando por B a la función Beta de Euler, el valor $B(n, n + 1)$ es:

(A) $\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}$, (B) $\frac{n!(n-1)!}{(2n)!}$, (C) $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$, (D) $\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$, (E) otro.

7. La función compleja:

$$f(z) = x^2 + iy^2, \quad z = x + iy,$$

cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los siguientes puntos del plano:

- (A) sólo para z real, (B) en ninguno, (C) sólo en $z = 0$,
(D) en todo $z \neq 0$, (E) en la recta $\{z = x + yi : x = y\}$.
-

8. El valor del límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$$

es:

(A) ∞ , (B) $\frac{1}{6}$, (C) $-\frac{1}{6}$, (D) 0, (E) $-\frac{1}{3}$.

9. La parametrización $z = 5 + 3e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$, representa la siguiente curva en el plano:

- (A) una circunferencia orientada en el sentido negativo; (B) una recta; (C) un segmento;
(D) una circunferencia orientada en el sentido positivo; (E) una semi-circunferencia.
-

10. Sea γ la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación positiva. El valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 4}$$

es:

(A) $2\pi i$, (B) 1, (C) $-\pi i$, (D) 0, (E) ninguno de los anteriores.

11. Dada la función f , periódica con periodo 2π y definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ -x, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

su serie de Fourier converge al valor de $f(x)$ para los siguientes valores de x reales:

- (A) para todo $x \neq 0$; (B) para todo x ; (C) para todo $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;
(D) para todo $x \neq (2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; (E) para todo $x \neq 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

12. La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2 + 1)}$ tiene las siguientes singularidades aisladas:

- (A) un polo simple y otro doble; (B) un polo doble y dos simples; (C) tres polos simples;
(D) una singularidad esencial y dos polos simples; (E) una singularidad evitable y dos polos simples.
-

13. Por si sirven de ayuda, recordemos las siguientes fórmulas, vistas en clase:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Sabiendo que f es una función continua en \mathbb{R} , periódica con periodo 2π y con los siguientes coeficientes de Fourier:

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 0, \quad n \geq 1.$$

concluimos que $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx =$

- (A) $1 + \frac{\pi^4}{90}$, (B) $\frac{\pi^2}{6}$, (C) $2 + \frac{\pi^2}{6}$, (D) $\frac{\pi^4}{15}$, (E) $1 + \frac{\pi^2}{6}$, (F) ninguno de los anteriores.
-

14. Dada la función $f(z) = \frac{z+1}{z^2}$, el residuo en su único polo es:

- (A) $2\pi i$, (B) 1, (C) -1 , (D) 0, (E) ninguno de los anteriores.
-

Ejercicios de desarrollo. En ambos se pide razonar la solución y nombrar los criterios y teoremas usados.

15. [10 puntos] Dada la función $f(x) = e^{-|x|}$, calcúlese su transformada de Fourier, $\hat{f}(s)$.
(Conviene recordar que, para la función $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$, su transformada de Fourier es $\hat{u}(x) = \pi e^{-|x|}$.)

16. [10+10=20 puntos]

(a) Evalúese la integral

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z+3i)(z^2+1)},$$

donde Γ es la circunferencia $\{z : |z| = 2\}$ con la orientación positiva.

(b) Lo mismo para la integral

$$J = \int_{\gamma} \frac{\cos z - 1}{z^2} dz,$$

siendo γ la circunferencia unidad, con la orientación negativa.