Análisis Matemático II (Ing. de Telecomunicaciones), 2008-09

EXAMEN FINAL, 22 de junio de 2009 $\boxed{\textbf{Modelo 1}}$

Primera Parte

Las preguntas 1–14 son de tipo test.
Puntuación. Respuesta correcta: 5 puntos, incorrecta o doble: -1 punto, en blanco: 0 puntos.

---

1. La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n+1}}$$

es igual a:
(A) $3/2$, (B) 2, (C) 3, (D) $2/3$, (E) la serie es divergente.

---

2. De entre las siguientes integrales impropias:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx\,, \qquad J = \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x^3}dx\,, \qquad K = \int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}dx$$

convergen
(A) sólo I y J ; (B) sólo J y K ; (C) sólo I y K ; (D) todas; (E) ninguna.

---

3. De las series infinitas

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}\,, \qquad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}\,,$$

podemos afirmar lo siguiente:
(A) S converge condicionalmente y σ absolutamente, (B) divergen, (C) convergen absolutamente,
(D) ambas convergen condicionalmente, (E) S diverge y σ converge absolutamente.

---

4. El conjunto de todos los valores posibles de $\log(1-\sqrt{3}i)$ está formado por
(A) $\log 2 - \dfrac{\pi i}{6}$, (B) $\log 2 - \dfrac{\pi i}{3}$, (C) $\log 2 - \dfrac{\pi i}{3} + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,
(D) $\log 2 - \dfrac{\pi i}{6} + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, (E) ninguno de los anteriores.

---

5. El radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e^{-2n}x^n$$

es igual a:
(A) $\dfrac{1}{e}$, (B) 1, (C) e^2, (D) $+\infty$, (E) ninguno de los anteriores.

---

6. Denotando por B a la función Beta de Euler, el valor $B(n, n+1)$ es:

$$\text{(A)}\ \frac{n!\,(n+1)!}{(2n+1)!}\,, \qquad \text{(B)}\ \frac{n!\,(n-1)!}{(2n)!}\,, \qquad \text{(C)}\ \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\,, \qquad \text{(D)}\ \frac{(n!)^2}{(2n-1)!}\,, \qquad \text{(E) otro.}$$

---

7. La función compleja:

$$f(z) = x^2 + i\,y^2\,, \qquad z = x + iy\,,$$

cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los siguientes puntos del plano:
(A) en todo $z \neq 0$, (B) en ninguno, (C) sólo en $z = 0$,
(D) sólo para z real, (E) en la recta $\{(z = x + yi : x = y\}$.

---

8. El valor del límite

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$$

es:

$$\text{(A)}\ \infty\,, \qquad \text{(B)}\ -\frac{1}{6}\,, \qquad \text{(C)}\ \frac{1}{6}\,, \qquad \text{(D)}\ 0\,, \qquad \text{(E)}\ -\frac{1}{3}.$$

---

9. La parametrización $z = 5 + 3e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, representa la siguiente curva en el plano:

(A) una circunferencia orientada en el sentido negativo; (B) una recta; (C) un segmento;
(D) una circunferencia orientada en el sentido positivo; (E) una semi-circunferencia.

---

10. Sea γ la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la orientación <u>positiva</u>. El valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 4}$$

es:

$$\text{(A)}\ 2\pi i\,, \qquad \text{(B)}\ 0\,, \qquad \text{(C)}\ -\pi i\,, \qquad \text{(D)}\ 1\,, \qquad \text{(E) ninguno de los anteriores}.$$

---

11. Dada la función f, periódica con periodo 2π y definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ -x, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

su serie de Fourier converge al valor de $f(x)$ para los siguientes valores de x reales:

(A) para todo $x \neq 0$; (B) para todo x; (C) para todo $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;
(D) para todo $x \neq (2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; (E) para todo $x \neq 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

12. Dada la función $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$, el residuo en su único polo es:

(A) $0\,,$ (B) $1\,,$ (C) $-1\,,$ (D) $2\pi i\,,$ (E) ninguno de los anteriores.

---

13. Por si sirven de ayuda, recordemos las siguientes fórmulas, vistas en clase:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Sabiendo que f es una función continua en $\mathbb{R}$, periódica con periodo 2π y con los siguientes coeficientes de Fourier:

$$a_0 = 2\,, \quad a_n = \frac{1}{n}\,, \quad b_n = 0\,, n \geq 1\,.$$

concluimos que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx =$

(A) $1+\dfrac{\pi^4}{90}\,,$ (B) $2+\dfrac{\pi^2}{6}\,,$ (C) $\dfrac{\pi^2}{6}\,,$ (D) $\dfrac{\pi^4}{15}\,,$ (E) $1+\dfrac{\pi^2}{6}\,,$ (F) ninguno de los anteriores.

---

14. La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z^2+1)}$ tiene las siguientes singularidades aisladas:

(A) un polo simple y otro doble; (B) un polo doble y dos simples; (C) tres polos simples;
(D) una singularidad esencial y dos polos simples; (E) una singularidad evitable y dos polos simples.

Ejercicios de desarrollo. En ambos se pide razonar la solución y nombrar los criterios y teoremas usados.

---

15. [10 puntos] Dada la función $f(x) = e^{-|x|}$, calcúlese su transformada de Fourier, $\hat{f}(s)$.
(Conviene recordar que, para la función $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, su transformada de Fourier es $\hat{u}(x) = \pi e^{-|x|}$.)

---

16. [10+10=20 puntos]

(a) Evalúese la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{(z+3i)(z^2+1)}\,,$$

donde Γ es la circunferencia $\{z : \, |z| = 2\}$ con la orientación positiva.

(b) Lo mismo para la integral

$$J = \int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z^2} dz\,,$$

siendo γ la circunferencia unidad, con la orientación negativa.