Variable Compleja I, CURSO 2015-16

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo. Lema de Schwarz

1) Determine razonadamente todas las funciones f, holomorfas en el disco unidad, tales que $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo z en el disco.

2) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $\partial\Omega$ y $f(z)g(z) \neq 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces $f(z) = cg(z)$ con $|c| = 1$.

b) Si $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ en $\partial\Omega$, entonces $f = g + i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y γ una curva simple y cerrada, C^1 a trozos, contenida en Ω junto con su dominio interior. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $|f| \equiv 1$ en la curva γ, demuestre que entonces o bien f tiene algún cero en el interior de γ, o bien f es constante en Ω.
Ayuda: Aplique el Principio del módulo máximo a la función $1/f$.

4) Sea f una función holomorfa en un dominio Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y con valores en ese mismo dominio. Supongamos que en Ω hay dos puntos a, b, $a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Pruebe que entonces f es la función identidad.
Ayuda: Pase a $\mathbb{D}$.

5) Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa no constante. Pruebe que:

a) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

b) $|f'(w)| \leq \dfrac{1 - |f(w)|^2}{1 - |w|^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Ayuda: Aplique el Lema de Schwarz a $\phi_a \circ f$ (1^{er} apartado) o a $\phi_b \circ f \circ \phi_a$ (2^{o} apartado) con un $a \in \mathbb{D}$ apropiado en cada caso, donde $\phi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo conforme del disco definido por $\phi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Conviene observar que $\phi_a \circ \phi_a$ es la identidad así que, por ejemplo, $f = \phi_a \circ (\phi_a \circ f)$.

6) Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, además, $f(0) = 1$. Usando una transformación de Möbius y el Lema de Schwarz, pruebe que:

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

Aplicaciones conformes

En los siguientes problemas denotaremos por $\mathbb{D}$ *al disco unidad y por* $\mathbb{H}$ *al semiplano superior. Es decir,* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

7) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

8) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$; **e)** $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

9) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$ y $T(-1) = \infty$.

10) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ y $T(0) = 3 + 2i$,

11) Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 en los siguientes casos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{H}$.

b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

e) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

f) $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$ y $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

12) Sabiendo que toda aplicación holomorfa biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ es de la forma

$$f(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad |a| < 1, \quad |\lambda| = 1,$$

describa todas las aplicaciones holomorfas biyectivas de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$.