Variable Compleja I, Curso 2015-16

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 5 de problemas

Singularidades aisladas. Series de Laurent

1) Clasifique las singularidades de las siguientes funciones por su tipo y calcule los residuos correspondientes:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}; \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^3-1}; \qquad \textbf{c)}\ \frac{\cos z-1}{z^2}; \qquad \textbf{d)}\ \frac{z^2}{\operatorname{sen} z}; \qquad \textbf{e)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}.$$

2) Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en las coronas indicadas:

$$\textbf{a)}\ \cos\frac{1}{z}, \quad 0<|z|<+\infty, \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^2+4z+3}, \quad 1<|z|<3; \qquad \textbf{c)}\ z^2e^{1/(1-z)}, \quad 0<|z-1|<+\infty.$$

3) Sean f y g dos funciones holomorfas en $D(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|<r\}$. Demuestre que si f tiene un cero de orden n y g tiene un cero de orden $n+1$ en el punto a, entonces f/g tiene un polo simple en a. Calcule el residuo.

Teorema de los residuos. Cálculo de algunas integrales impropias

4) Calcule las siguientes integrales: (i) $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2-z+1}$, $\quad r\neq 1$; $\qquad$ (ii) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1+z}{1-\cos z}dz$.

5) Evalúe la integral $\int_\gamma z^n e^{1/z}dz$, donde $n\in\mathbb{N}$ y γ es una circunferencia (orientada positivamente) que rodea al origen.

6) Demuestre razonadamente que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$, donde $a>0$.

7) Demuestre las siguientes igualdades utilizando el teorema de los residuos (con una elección adecuada del camino):

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}, \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=\pi.$$

8) Sea $R>3$ y γ_R la semicircunferencia centrada en el origen y situada en el semiplano inferior, desde $-R$ hasta R.

(a) Obtenga una estimación para la integral $J_R=\displaystyle\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^2+9i}$ y luego deduzca que $\lim_{R\to+\infty}J_R=0$.

(b) Añada el intervalo desde R hasta $-R$ para cerrar la curva y utilice el apartado anterior y el teorema de los residuos (o la fórmula integral de Cauchy) para calcular las siguientes integrales impropias:

$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4+81}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6}, \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+81}\,dx=\frac{\pi\sqrt{2}}{54}.$$

9) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(x-1)^2+1}, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2-1}\, dx.$$

10) Calcule la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

integrando a lo largo de un sector circular centrado en el origen, de radio $R > 1$ y de apertura $(2\pi)/3$.

11)* Compruebe las siguientes igualdades para $|p| < 1$, $q > 0$:

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\cos \frac{\pi p}{2}\right)^{-1}, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x^p}{(x+q)^2}\, dx = \frac{\pi p\, q^{p-1}}{\operatorname{sen} \pi p}.$$

12)* Demuestre que cada una de las *integrales de Fresnel*:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx, \qquad \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

tiene valor $\sqrt{2\pi}/4$, integrando la función e^{iz^2} sobre el contorno γ compuesto por el segmento $[0, R]$, el arco circular desde R hasta $Re^{\pi i/4}$ y el segmento desde $Re^{\pi i/4}$ hasta el origen y utilizando el teorema de Cauchy.
Ayuda: para acotar la integral sobre el arco, es conveniente usar la *desigualdad de Jordan* vista en Cálculo I: $\operatorname{sen} t \geq (2t)/\pi$, para $0 \leq t \leq \pi/2$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de esa desigualdad? (Observe la gráfica de la función seno.)

Principio del argumento. Teorema de Rouché

13) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

14) Halle el número de ceros de la función holomorfa

$$f(z) = z^4 - 12z^2 + 15z + i$$

(a) en el disco unidad; (b) en la corona $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$; (c) en el resto del plano.

15) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos:

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

16) Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:
a) en el semiplano superior $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$;
b) en el semiplano derecho $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

17)* Pruebe que la ecuación $z = \lambda - e^{-z}$, con λ real y $\lambda > 1$, tiene en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ una única raiz y, además, ésta es real.