Variable Compleja I, Curso 2015-16

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 4 de problemas

Teorema de unicidad (principio de los ceros aislados)

1) Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Demuestre que no existe ninguna función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

2) Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

3) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{2^n} \qquad \text{para} \quad n \ge 2,$$

entonces f es idénticamente cero en $\mathbb{D}$.
Sugerencia: Como $f(0) = 0$, entonces $f(z) = z^k g(z)$ con $g(z)$ holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g(0) \neq 0$. Compruebe que ésto es imposible.

4) Halle todas las funciones enteras tales que

a)

$$f(z) = f(z^2), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

b)

$$f(2z) = 2f(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

5) Halle todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$f(z^2) = f(z) + z, \text{ y } f(0) = 0 \qquad (*)$$

Compruebe que no existe ninguna función entera que satisfaga (*).

6)* Sea α un número irracional y $q = e^{2\pi i\alpha}$. Demuéstrese que las únicas soluciones holomorfas de la ecuación funcional $f(z) = f(qz)$ en la corona $\Omega = \{\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$ son las funciones constantes.

7)* Demuestre que si f es holomorfa en el disco unidad y $|f(z)| \le 1-|z|$ allí, entonces $f \equiv 0$. ¿Puede una función holomorfa satisfacer $|f(z)| \ge 1/(1-|z|)$ para $|z| < 1$?

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

8) Determine razonadamente todas las funciones enteras f (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)| \leq \frac{2016\,|z|^2}{|z|^2+1}, \quad |z| \geq 1\,.$$

9) Supongamos que f es entera. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ entonces f es constante.

b) Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces f es un polinomio de grado ≤ 2 (de hecho un múltiplo de z^2).
Ayuda: Conviene usar las estimaciones integrales de Cauchy.

10) Si f es entera y cumple

$$|f(z)| \leq \pi e^{2\,\mathrm{Re}\,z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ae^{2z}$.

11) Demuestre que si una función entera f satisface

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+i) &= f(z) \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.

Sugerencia: Use el teorema de Liouville.

12) Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si f es entera y $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

b) Análogamente, si para algún $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ se tiene $|f(z) - a| \geq r$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

c) Concluya que si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no constante, entonces, $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Sugerencia: Considere la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ y aplique el teorema de Liouville.

Teorema de Morera

13) La función g viene dada por $g(z) = \int_0^\pi \cos(z+t)\,dt$, para $z \in \mathbb{C}$. Demuéstrese que g es entera.
Observación. El teorema de Morera nos permite demostrar que funciones definidas como integrales de cierto tipo son también holomorfas, lo cual nos proporciona más ejemplos aparte de las fórmula explícitas y series de potencias.

14)* Sea f una función continua en el plano complejo $\mathbb{C}$ y holomorfa en el plano menos un segmento $[a,b]$ del eje real. Utilizando el teorema de Morera, demuestre que f es entera.