Variable Compleja I, Curso 2015-16

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 2 de problemas

Topología del plano y del plano extendido. La esfera de Riemann

1) Decida si las sucesiones $z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n$, $w_n = \left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$ tienen límite (finito) o no.

Esfera de Riemann. Se considera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y se definen los entornos de ∞ como aquellos que contienen un conjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$.
Con estos entornos, $z_n \to \infty$ quiere decir que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, es decir:

$$\textit{Para todo } R > 0 \textit{ existe } N \textit{ tal que } |z_n| > R \textit{ para todo } n > N\,.$$

Igualmente, $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$ quiere decir:

$$\textit{Para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } R > 0 \textit{ tal que para todo } z \textit{ con } |z| > R \textit{ se tiene } |f(z) - a| < \epsilon\,.$$

De manera similar se definen $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

2) Si $|z| > 1$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = \infty$.

3) Sea $\mathbb{S}^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$, $\mathbf{N} = (0,0,1)$ y consideremos la proyección estereográfica:

$$\pi :\ \mathbb{S}^2 \to \hat{\mathbb{C}}, \quad \pi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}, & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{N} \\ \infty, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{N}. \end{cases}$$

a) Compruebe que π es biyectiva entre $\mathbb{S}^2$ y $\hat{\mathbb{C}}$.

b) Demuestre que $\pi^{-1}(z) = \left(\dfrac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \dfrac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$.

c) Sea $\rho(z,w)$ =distancia (en $\mathbb{R}^3$) entre $\pi^{-1}(z)$ y $\pi^{-1}(w)$ para $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces:

$$z_n \to z \text{ en } \hat{\mathbb{C}} \iff \rho(z_n, z) \to 0$$

4) Sea π, como en el ejercicio anterior, la proyección estereográfica.

a) Demuestre que π transforma las circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas del plano.

b) ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

c) ¿Qué corresponde en la esfera de Riemann a una familia de rectas paralelas del plano?

d) Halle, en la esfera de Riemann, las imágenes por π^{-1} de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{Im} z = 0$, **ii)** $\operatorname{Re} z < 1$, **iii)** $|z| < 1$, **iv)** $|z| > 2$.

Funciones de una variable compleja: límites y continuidad

5) Decida razonadamente si las siguientes funciones tienen límite finito o no en el punto indicado:

a) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z} + 2\,\mathrm{Im}\, z$ (para $z \neq 0$) en $z = 0$; **b)** $f(z) = \dfrac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ (para $z \neq -2i$) en $z = -2i$.

6) Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

b) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ son polinomios con $a_n \neq 0 \neq b_m$, entonces se tiene

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ \infty, & \text{si } n > m. \end{cases}$$

7) Halle los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4 - 1}{z - i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

8) No existe $\lim_{z\to\infty} e^{-z}$.

Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

9) ¿En qué puntos del plano son derivables las siguientes funciones?

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + ixy$; **b)** $f(z) = |z|^4$; **c)** $f(z) = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$; **d)** $\cos \overline{z}$.

10) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y g una función holomorfa en Ω. ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones? Razone la respuesta.

a) $f(z) = g(\overline{z})$; **b)** $f(z) = \overline{g(z)}$; **c)** $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$; **d)** $f(z) = |g(z)|$.

Ayuda: en todos los apartados basta con usar la definición de derivada.

11) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones? ¿Cuál es su derivada?

a) $\dfrac{1}{(z - 1/z)^2}$, **b)** $\dfrac{1}{(z-1)(z^2-2)}$, **c)** e^{e^z}, **d)** $\operatorname{sen}(e^z)$, **e)** $e^{z+1/z}$, **f)** $\dfrac{1}{e^z - 1}$.

12) Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Demuestre que si $|f|$ es constante en Ω, entonces f es constante.

13)* Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si h es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ y f es holomorfa, entonces $\Delta(h \circ f) = (\Delta h \circ f)|f'|^2$.

b) Si f es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, entonces

$$\Delta(|f|) = \frac{|f'|^2}{|f|}.$$

c) Si f, g son holomorfas en un dominio Ω, y si $|f| + |g|$ es constante en Ω y f y g no se anulan en Ω, entonces f y g son constantes.

Funciones exponenciales y trigonométricas. Raíces, logaritmos y potencias complejas

14) Demuestre que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

15) Demuestre que: **a)** $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, **b)** $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$.

16) Resuelva las siguientes ecuaciones: **a)** $\cos z = 2$; **b)** $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

17) Calcule los siguientes valores:

a) $(1-i)^i$, 2^{-1+i}, $i^{\sqrt{2}}$, tomando la rama principal del logaritmo.

b) i^{-i}, $\log 3$, $\log(\sqrt{3}+i)$, $(1+i)^{1+i}$, $2^{\pi i}$ (calcule todos los posibles valores).

18) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones y cuál es su derivada?

a) $\log(e^z+1)$, **b)** $\sqrt{e^z+1}$, **c)** $\operatorname{sen}\sqrt{z}$, **d)** z^{2z}.

(**Nota**: hay que elegir una rama del argumento.)

Series de potencias

19) Halle el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$, **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$, **g)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, **h)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, **i)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$, **j)** $\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$,

20) Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, se verifican las identidades:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}.$$

21) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado:

a) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z; **b)** $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z-1$.

22) Calcule el radio de convergencia y la suma de: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!}$.

23) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representan $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ en términos de f?

24) ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series?

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$, **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$, **e)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

25) Desarrolle en series de potencias (centradas en el origen) las siguientes funciones elementales:

$$(1-z)\cos z, \qquad z^3\log(1-z), \qquad \frac{e^{-z}}{1+z}, \qquad e^{2z^3}, \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2},$$

indicando en cada caso el radio de convergencia.

26) Escriba explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}$. Luego calcule la suma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}$.
(**Ayuda:** Evalúe la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.)

27) (Teorema del binomio para exponentes reales.) Sea α un número real con $\alpha\notin\mathbb{N}$ y definamos

$$\binom{\alpha}{0}=1, \quad \binom{\alpha}{1}=\alpha, \quad \binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \quad \text{si } j>1.$$

a) Demuestre que el radio de convergencia de la serie $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$ es 1.

b) Compruebe que $(1+z)F'(z)=\alpha F(z)$.

c) Concluya que $F(z)=(1+z)^\alpha$, es decir, $(1+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$ si $|z|<1$.
(Aquí se toma la rama principal de w^α.)

28) Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ para $z\in\mathbb{C}$.

a) Demuestre que la serie converge si $\operatorname{Re} z>1$.

b) Demuestre que si a es un número real con $a>1$ entonces la serie converge uniformemente en $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z\geq a\}$.
Nota: $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ es la *función Zeta de Riemann.*

29) Supongamos que la serie de potencias $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R=1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=0$. Denotemos

$$s_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k \qquad \text{y} \qquad s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

a) Demuestre que $s_n(z)=(1-z)\sum_{k=0}^{n-1}s_k z^k+s_n z^n$ y concluya que $f(z)=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}s_n z^n$.

b) Demuestre que $f(z)\to 0$ cuando z se aproxima a 1 de tal forma que $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotado.