Variable Compleja I 3^{o} **de Matemáticas /** 4^{o} **de Doble Titulación**

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL, MAYO DE 2016

SOLUCIONES

1. [2,5 **puntos**] Determine el número de ceros de la función $f(z) = 2z^8 - e^{z-1}$ en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   SOLUCIÓN. Sean $F(z) = 2z^8$ y $G(z) = e^{z-1}$. Ambas funciones son holomorfas en un dominio que contiene a $\overline{D}$ (de hecho, lo son en todo el plano) y en la frontera del disco unidad cumplen la desigualdad estricta
   $$|G(z)| = e^{\operatorname{Re} z-1} \le e^{1-1} = 1 < 2 = 2|z^8| = |F(z)|$$
   ya que $\operatorname{Re} z \le |z| = 1$ en la circunferencia unidad. Se cumplen las condiciones del teorema de Rouché que nos dice que las funciones $f = F - G$ y F tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}$, que es 8 (ya que F tiene en el origen un cero de orden 8). ■

2. [2,5 **puntos**] Determine todas las funciones f holomorfas en el disco unidad y tales que
   $$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = e^{-\dfrac{1}{n}}$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$.

   SOLUCIÓN. Escribiendo $\frac{1}{n+1} = z_n$, despejamos n y luego $\frac{1}{n}$:
   $$n = \frac{1}{z_n} - 1 = \frac{1-z_n}{z_n}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{z_n}{1-z_n}.$$
   De aquí obtenemos que
   $$e^{-\frac{1}{n}} = e^{\frac{z_n}{z_n-1}}$$
   Debido a la condición del enunciado que cumple f, esto nos dice que las funciones $f(z)$ y $g(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ coinciden en la sucesión $z_n = \frac{1}{n+1}$ que tiende a $0 \in \mathbb{D}$. Según el teorema de unicidad, $f \equiv g$ en $\mathbb{D}$, así que
   $$f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}. \qquad \blacksquare$$

3. [2 **puntos**] Sea f una función entera (holomorfa en todo el plano) que cumple
   $$\operatorname{Re} f(z) \le 0 \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$
   Demuestre que f es constante.

SOLUCIÓN. Consideremos la función $g = e^f$ que es entera al ser la composición de dos enteras. Además, cumple

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}\, f(z)} \leq e^0 = 1\,.$$

Por el teorema de Liouville, $g \equiv cte$, digamos $g = C$. Esto nos dice que $e^{f(z)} = C$ para todo z. Por tanto, en cada punto z del plano se cumple

$$f(z) = \ln|C| + (\arg C + 2\pi n)\, i$$

para cierto $n \in \mathbb{Z}$. Son infinitos valores pero aislados. Debido a la continuidad de f, ésta no puede tomar uno de ellos en un punto y otro en otro. Por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f(z) = \ln|C| + i(\arg C + 2\pi n_0)\,,$$

así que f es constante. ■

4. [3 **puntos**] Consideremos la función

$$f(z) = z^5 \operatorname{sen}(1/z^2)\,, \qquad z \neq 0\,.$$

(a) Desarrolle la función f en serie de Laurent en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Sea γ la circunferencia unidad con orientación antihoraria. Utilice el teorema de los residuos para calcular la integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

SOLUCIÓN. (a) Primero, recordemos el desarrollo del seno en serie de Taylor:

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots\,, \qquad w \in \mathbb{C}\,.$$

Sustituyento $w = \frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$, obtenemos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{120z^{10}} - \frac{1}{5040z^{14}} + \dots\,, \qquad z \neq 0\,.$$

Finalmente, multiplicando por z^5 obtenemos:

$$f(z) = z^5 \operatorname{sen}(1/z^2) = z^3 - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^5} - \frac{1}{5040z^9} + \dots\,, \qquad z \neq 0\,,$$

la serie de Laurent de f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Obviamente, la única singularidad que tiene f en el interior de la curva γ es $z = 0$. Recordando que el residuo en $z = 0$ es el coeficiente de la serie correspondiente al término $\frac{1}{z}$, obtenemos que $\mathrm{Res}\,(f;0) = -\frac{1}{6}$. Según el teorema de los residuos,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\,(f;0) = -\frac{\pi i}{3}\,. \qquad ■$$