

APELLIDOS, NOMBRE _____

D.N.I. _____ FIRMA _____

--	--	--	--	--

Se pide justificar todas las respuestas de manera breve pero clara y detallada, nombrando los teoremas y las fórmulas que se usen.

1. [3 puntos] Calcule razonadamente el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^n.$$

2. [2 puntos] Sea $|z| < 1$. Calcule razonadamente la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n.$$

3. [2 puntos] Determine el lugar geométrico de los puntos z en el plano tales que $|z| = 2|z - i|$.

4. [3 puntos] Consideremos las siguientes curvas:

γ : el arco de la circunferencia unidad (orientada en el sentido anti-horario) desde el punto $e^{-\frac{3\pi i}{4}}$ hasta el punto i ,

I : el segmento $[i, 2i]$,

Γ : la semicircunferencia centrada en el origen y de radio 2, desde $2i$ hasta $-2i$ (también vista como parte de la circunferencia con orientación positiva).

(a) Calcule razonadamente (por definición o de otra forma) el valor de la integral $\int \frac{1}{z} dz$ sobre la unión de las curvas γ , I y Γ .

(b) Sea C la curva cerrada que se obtiene añadiendo a la unión de γ , I y Γ el segmento desde $-2i$ hasta el punto $e^{-\frac{3\pi i}{4}}$. Calcule $\int_C \frac{1}{z} dz$.