Variable Compleja I 3$^{\text{o}}$ **de Matemáticas / 4$^{\text{o}}$ de Doble Titulación**

EXAMEN FINAL, CONVOCATORIA DE MAYO DE 2016

Inicial del primer apellido:

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I./PASAPORTE______________ FIRMA ______________________________

Se pide justificar todas las respuestas de manera clara y detallada, mostrando el trabajo y nombrando los teoremas y las fórmulas que se usen.

1. Determine razonadamente todas las funciones enteras f tales que $|f(z)| \le |ze^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Decida razonadamente si es cierto o falso que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   (b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen} z = e^2 z^3$ en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$? Justifique la respuesta.

3. (a) Desarrolle en serie de Laurent en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la siguiente función

$$f(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

(Sugerencia: Binomio de Newton.)

(b) Calcule $\operatorname{Res}(f; 0)$.

(c) Usando métodos de variable compleja, demuestre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

4. Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \text{ y } \operatorname{Re} z < 0\}$ sobre el primer cuadrante $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ y } \operatorname{Re} z > 0\}$. Justifique los pasos intermedios.