

Variable Compleja I (3º de Matemáticas), 2015-16

Diario de clase

Semana del 21-22 de enero de 2016. Presentación, información. Propiedades de números complejos y operaciones aritméticas con ellos. El inverso multiplicativo.

Semana del 25-28 de enero de 2016. Conjugación, módulo y sus propiedades. Ejemplos. Ley del paralelogramo, desigualdad triangular y sus consecuencias. Representación polar, fórmula de Euler. Ejemplos. Argumento, fórmula para el argumento. Multiplicación en forma polar. Ejemplos. Fórmula de A. de Moivre. Raíces complejas n -ésimas. Ejemplos.

Semana del 1-5 de febrero de 2016. Descripciones complejas de círculos, discos, rectas y semiplanos. Topología del plano: más sobre la convergencia de sucesiones. Repaso: conjuntos abiertos y cerrados. Ejemplos y propiedades. Repaso de la topología del plano: cierre, interior y frontera de un conjunto. Conjuntos acotados y compactos. Ejemplos. Conjuntos relativamente compactos. Homeomorfismos. La esfera de Riemann. Punto en el infinito. Proyección estereográfica y su inverso; fórmulas explícitas. Problemas: Hoja 1.

Semana del 8-12 de febrero de 2016. Los entornos del infinito y las imágenes de algunos conjuntos por la proyección estereográfica. Funciones de una variable compleja: límites finitos, límites infinitos y límites en el infinito. Ejemplos. Continuidad de funciones complejas. Continuidad uniforme. Ejemplos. Derivada compleja. Funciones holomorfas. Ejemplos. Ecuaciones de Cauchy-Riemann como condición necesaria para la holomorfía. Enunciado de una condición suficiente más fuerte. Ejemplos. Problemas: Hoja 1.

Semana del 15-19 de febrero de 2016. Demostración de que las ecuaciones de Cauchy-Riemann más continuidad son suficientes para que la función sea holomorfa. Más ejemplos. La función exponencial compleja. Propiedades. Regla de la cadena. Derivadas de Wirtinger (delta y delta-barra): motivación, relaciones con la holomorfía y ejemplos. Problemas: Hoja 1.

Semana del 22-26 de febrero de 2016. Más propiedades de las derivadas de Wirtinger. Laplaciano; funciones armónicas; ejemplos. Holomorfía y armonicidad. Cálculo de la conjugada armónica: ejemplo. Dominios planos. Conexión por caminos. Conexión por líneas poligonales de los dominios planos. Funciones holomorfas de módulo constante o con la parte real (o imaginaria) constante. Dominios simplemente conexos; ejemplos. Potencias, raíces y logaritmos complejos y sus valores. Función argumento y su continuidad. Dominios en los que el logaritmo y las potencias son holomorfas. Raíces y logaritmos complejos como funciones holomorfas. Mención de superficies de Riemann.

Semana del 29 de febrero-4 de marzo de 2016. Teorema de la función inversa para las funciones holomorfas. Aplicación a la función logaritmo. Convergencia de sucesiones de funciones: puntual, uniforme y uniforme en subconjuntos compactos. Ejemplos. Convergencia de series de funciones: puntual, uniforme y uniforme en compactos. Ejemplos. Criterio de Weierstrass. Sucesiones uniformes de Cauchy y criterio de Cauchy. La convergencia uniforme en un compacto preserva la continuidad. Convergencia absoluta. Series de potencias. Radio de convergencia de una serie de potencias. Fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia. Ejemplos de distintos comportamientos en el borde del disco de convergencia. Una fórmula alternativa para el radio de convergencia. Series lagunares. Derivación término por término de una serie de potencias.

Semana del 7-11 de marzo de 2016. Más sobre la derivación de series de potencias. La función exponencial y su desarrollo en serie de potencias. Suma de series de potencias. Funciones trigonométricas e hiperbólicas y su desarrollo en serie de potencias. Multiplicación de series de potencias. Ejemplos. Problemas: Hoja 2. Integrales de línea complejas. Primeras propiedades: linealidad, independencia de la parametrización, orientaciones opuestas, sumas de curvas. Ejemplos de cálculo de integrales de línea. Ejemplos que motivan los teoremas de Cauchy. Enunciado del teorema integral de Cauchy. Ejemplos. Problemas: Hoja 3.

Semana del 14-18 de marzo de 2016. Problemas: Hoja 2. Motivación y enunciado de la fórmula integral de Cauchy. Ejemplos de uso de la Fórmula Integral de Cauchy. Índice de un punto respecto a una curva. Fórmula integral de Cauchy para la derivada. Ejemplos mixtos. Problemas: Hoja 3. Primer examen parcial.

Semana del 28 de marzo – 1 de abril de 2016. Más propiedades de integrales complejas. Elemento de longitud de arco. Estimaciones básicas de integrales de línea. Ejemplos. Problemas: Hoja 3. Cálculo de algunas integrales impropias usando contornos, estimaciones y la fórmula integral de Cauchy. Integral de la derivada de una función en una curva cerrada. Demostración del teorema de Cauchy en el caso de un rectángulo. Hacia el caso general: integración por líneas poligonales, independencia de la elección de línea poligonal, definición de la función primitiva.

Semana del 4–8 de abril de 2016. Función primitiva: definición, independencia del camino. Demostración del caso general del teorema de Cauchy. Comentarios sobre las funciones primitivas. Fórmula de Green en forma compleja. Versión general del teorema integral de Cauchy (integración sobre el borde de un dominio acotado por un número finito de curvas simples y cerradas). Demostración de la fórmula integral de Cauchy en forma general (para dominios acotados por un número finito de curvas simples y cerradas). Consecuencias de la fórmula integral de Cauchy: índice de una curva respecto a

un punto, teorema del valor medio. Problemas: Hoja 3. Otras consecuencias de la fórmula integral de Cauchy: teorema de Liouville y sus aplicaciones. Teorema fundamental del álgebra.

Semana del 11–15 de abril de 2016. Una aplicación cuantitativa de la fórmula integral de Cauchy: cálculo de algunas integrales trigonométricas. Ejemplo: integral de Poisson. Desarrollo local en series de potencias; equivalencia entre holomorfía y analiticidad. Coeficientes de la serie de Taylor: unicidad, cálculo. Fórmula integral de Cauchy para las derivadas de orden superior. Comentarios. Unicidad de la función a partir de la serie de Taylor en un punto. Más consecuencias de la holomorfía: comportamiento local de las funciones analíticas, orden de un cero. Principio de los ceros aislados. Teorema de unicidad. Ejemplos. Los ceros de una función holomorfa forman un conjunto finito o numerable. Estimaciones de Cauchy. Ejemplos.

Semana del 18–22 de abril de 2016. Problemas: Hoja 3, Hoja 4. Teorema de Morera. Ejemplos de su uso. Singularidades aisladas: clasificación. Teorema de Riemann acerca de las singularidades evitables. Orden de un polo. Teorema de Casorati-Weierstrass. Desarrollo en serie de Laurent de una función alrededor de su singularidad aislada. Ejemplos. Discusión de los tres tipos de singularidades. Ejemplo de una serie de Laurent convergente en una corona. Residuos. Relación con los coeficientes de la serie de Laurent.

Semana del 25–29 de abril de 2016. Cálculo del residuo en un polo. Teorema de los residuos. Aplicaciones cuantitativas. Cálculo de algunas integrales complejas. Cálculo de integrales impropias de Riemann: funciones racionales y combinaciones de racionales y trigonométricas. Lema de Jordan. Problemas: Hoja 4. Aplicaciones cualitativas del teorema de los residuos: principio del argumento, relación con el índice de la curva imagen respecto al origen, teorema de Rouché. Ejemplos. Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo. Ejemplos. Lema de Schwarz. Problemas: Hoja 5.

Semana del 2–6 de mayo de 2016. Segundo examen parcial. Lema de Schwarz: demostración y ejemplos. Funciones holomorfas inyectivas y localmente inyectivas, relación con los ceros de la derivada. Ejemplos. Aplicaciones conformes. Enunciado del teorema de Riemann. Funciones elementales (potencias, raíces, exponencial, logarítmicas) vistas como transformaciones entre dominios. Transformaciones lineales fraccionarias (o de Möbius) y sus propiedades. Ejemplos de aplicaciones holomorfas y biyectivas entre diversos dominios simplemente conexos. Problemas: Hoja 6. Mención de los automorfismos del disco.