Variable Compleja I ($3^{\underline{o}}$ de Matemáticas)

Apuntes y problemas resueltos de análisis complejo (2015-16)

Transformaciones (aplicaciones) conformes y temas relacionados

En estos apuntes trataremos, fundamentalmente a través de ejemplos sencillos y resueltos, las propiedades básicas de las aplicaciones conformes, así como su uso combinado con el lema de Schwarz y otros resultados estrechamente relacionados.

Funciones holomorfas e inyectivas. Propiedad conforme

Las funciones consideradas en estos apuntes serán siempre holomorfas (analíticas) en un dominio plano, Ω. (Notación: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, como antes.) Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es localmente inyectiva en $a \in \Omega$ si existe un $r > 0$ tal que $D(a;r) \subset \Omega$ y f es inyectiva en $D(a;r)$; es decir, si cerca del punto a la función f no toma el mismo valor dos veces. Asimismo, diremos que es localmente inyectiva en Ω si lo es en cada $a \in \Omega$.

Usando el teorema de Rouché, puede demostrarse el siguiente resultado (que normalmente se prueba en el curso de Variable Compleja II pero se puede usar aquí, tanto en las soluciones como en los exámenes).

Teorema. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces f es localmente inyectiva en Ω si y sólo si $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Ejercicio 1. *Compruebe que el polinomio $P(z) = z + \dfrac{z^2}{2}$ es una función inyectiva en el disco unidad. ¿Es inyectivo en algún disco más grande centrado en el origen?*

Solución. Comprobamos la inyectividad por definición: si $P(z) = P(w)$, entonces $z + \dfrac{z^2}{2} = w + \dfrac{w^2}{2}$ y, por tanto, $z - w = \dfrac{w^2 - z^2}{2}$. Si $z \neq w$, se seguiría que $-1 = \frac{z+w}{2}$, lo cual es imposible ya que, por la desigualdad triangular, en el disco unidad se cumple que $|z + w| \leq |z| + |w| < 2$. Por tanto, acabamos de comprobar que z, $w \in \mathbb{D}$ y $P(z) = P(w)$ implica $z = w$ y eso significa por definición que P es inyectiva en $\mathbb{D}$.

Si P fuese inyectivo en un disco centrado en el origen y de radio mayor que uno, su derivada sería distinta de cero en todo ese disco y, en particular, en el punto -1. No obstante, comprobamos directamente que $P'(z) = 1 + z$, así que $P(-1) = 0$. Por tanto, es imposible que P sea inyectivo en un disco más grande. ■

Ejercicio 2. *¿Dónde es localmente inyectiva la función $f(z) = z^2$?*

Solución. Por el teorema enunicado arriba, f no es inyectiva en ningún entorno del origen ya que $f'(0) = 0$. Esto también se puede ver directamente: en cada disco $D(0;r)$, tomando n suficientemente grande, podemos encontrar los puntos $1/n$ y $-1/n$ y es obvio que $f(1/n) = 1/n^2 = f(-1/n)$.

Asimismo, f es localmente inyectiva en el plano agujereado, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ya que allí $f'(z) = 2z \neq 0$. Esto también se puede ver de forma directa. A saber, es evidente que $f(z) = f(w)$ si y sólo si $z^2 - w^2 = 0$, es decir, si y sólo si $w = \pm z$. Es decir, f toma cada valor en dos puntos opuestos (simétricos respecto al origen). Es obvio tanto algebraica como geométricamente que el conjunto simétrico al disco $D(a;r) = \{z : |z-a| < r\}$ respecto al origen es

$$\{-z : |z-a| < r\} = \{w : |-w-a| < r\} = \{w : |w+a| < r\} = D(-a;r).$$

Sea $a \neq 0$ un punto arbitrario. Es evidente que podemos elegir $r > 0$ suficientemente pequeño de manera que los discos simétricos $D(a;r)$ y $D(-a;r)$ sean disjuntos (¡dibujo!)). Entonces es claro que f es inyectiva en $D(a;r)$. Esto completa la prueba alternativa de la inyectividad local en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

Diremos que f es una aplicación conforme en Ω si preserva los ángulos: es decir, si para cada dos curvas suaves, γ y Γ, con intersección en un punto $a \in \Omega$, el ángulo que forman las curvas imágenes, $f(\gamma)$ y $f(\Gamma)$, en $f(a)$ es igual al ángulo que forman γ y Γ en a. (Recordemos que el ángulo entre dos curvas suaves es el ángulo entre sus tangentes.) Si, además, se preserva la orientación de los ángulos, diremos que f preserva la orientación.

Por ejemplo, la función $f(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$ (que es, geométricamente, una rotación correspondiente al ángulo $\arg \lambda$) evidentemente es conforme y preserva la orientación, mientras que la función $f(z) = \overline{z}$ (la conjugación compleja) es conforme pero invierte la orientación (lleva ángulos positivos en negativos y viceversa).

Proposición. Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y localmente inyectiva en Ω. Entonces f es conforme y preserva la orientación.

Trivialmente, si una función es holomorfa e inyectiva en un dominio Ω, entonces también es localmente inyectiva en Ω. El recíproco es falso en general, como nos mostrará el siguiente ejemplo.

Ejercicio 3. *Encuentre un ejemplo específico de una función entera y localmente inyectiva (conforme) en todo el plano pero no inyectiva. Examine su inyectividad en algún dominio más pequeño.*

SOLUCIÓN. Un ejemplo claro es $f(z) = e^z$. Obviamente, $f'(z) = e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, así que f es localmente inyectiva en $\mathbb{C}$. No obstante, no es inyectiva en el plano ya que $f(z + 2\pi i) = f(z)$ para todo z.

También es claro que si $|\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Im}\, w| < 2\pi$, entonces es imposible que $e^z = e^w$ salvo que $z = w$. Se sigue de aquí que la función exponencial sí es inyectiva en cada banda (franja) horizontal abierta de anchura, como mucho, 2π:

$$\Omega_h = \{z : \alpha < \mathrm{Im}\, z < \alpha + h\}, \qquad 0 < h \leq 2\pi,$$

un hecho que usaremos a continuación. ■

Uno de nuestros objetivos principales es, dados dos dominios (con características similares), Ω y D, encontrar una función inyectiva $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) = D$. Observemos que aquí se pide que la función sea inyectiva en todo Ω, que es más que localmente inyectiva en Ω. No obstante, nos referimos con frecuencia a estas transformaciones como a las aplicaciones conformes entre los dominios considerados.

Ejercicio 4. *Hállese una aplicación holomorfa y biyectiva del semiplano superior* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *sobre el disco unidad* $\mathbb{D}$ *mediante un razonamiento geométrico, sin realizar cálculos y sin usar teoremas avanzados.*

SOLUCIÓN. Los puntos i y $-i$ son simétricos respecto al eje real. Por tanto, un punto z pertenece a $\mathbb{H}$ si y sólo si dista más del punto i que del punto $-i$; es decir,

$$z \in \mathbb{H} \iff |z-i| < |z+i| \iff \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \iff \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}.$$

Esto nos dice que la función $S(z) = (z-i)/(z+i)$ transforma $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{D}$. Es fácil comprobar directamente que S es inyectiva, luego es una de las transformaciones buscadas. (Conviene tener en cuenta que existen otras pero en el enunciado sólo se pide encontrar una.) ■

Algunas funciones básicas (raíces, potencias, exponencial, logaritmo) vistas como transformaciones geométricas

La función $f(z)=z^2$. Es holomorfa en todo el plano y, como ya hemos comentado, es inyectiva en cualquier dominio Ω tal que si $z\in\Omega$ entonces $-z\notin\Omega$. Por ejemplo, cualquier semiplano cuyo borde pasa por el origen tiene dicha propiedad y, por supuesto, también la tiene en un dominio contenido en tal semiplano (por ejemplo, un cuadrante).

Ejercicio 5. *Determine la imagen del primer cuadrante:* $Q=\{z:\ \mathrm{Re}\,z>0,\mathrm{Im}\,z>0\}$ *por la aplicación* $f(z)=z^2$.

Solución. Nos conviene describir Q es en términos de la representación polar de sus puntos:

$$Q=\left\{z=re^{it}:\ 0<r<+\infty,\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Es inmediato que, si $z=re^{it}$ entonces $z^2=r^2e^{2it}$. Cuando r recorre todo el intervalo $(0,+\infty)$, lo mismo pasa con r^2, así que el módulo de z^2 puede tomar valores positivos arbitrarios. Los argumentos se duplican por esta transformación: $0<2t<\pi$. Por tanto, la imagen $f(Q)$ es el conjunto de todos los puntos cuyo módulo es arbitrario y cuyo argumento está en $(0,\pi)$, lo cual es el semiplano superior abierto: $f(Q)=\{z:\ \mathrm{Im}\,z>0\}$.

(De esta forma, hemos encontrado un ejemplo explícito de aplicación holomorfa y biyectiva entre el primer cuadrante y el semiplano superior.) ■

La función $f(z)=\sqrt{z}$. Como ya hemos visto en clase, puede definirse como función holomorfa en un dominio con un corte desde el origen hasta el ∞, por ejemplo, en

$$D=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:\ x\le 0\}=\{z\in\mathbb{C}:\ -\pi<\arg z<\pi\}$$

y mediante la fórmula $\sqrt{re^{it}}=\sqrt{r}e^{it/2}$ (o en otro dominio similar y mediante otra fórmula similar). Es fácil ver que esta función es, de hecho, inyectiva en D.

Ejercicio 6. *Determine la imagen del dominio* D *señalado arriba por la aplicación* $f(z)=\sqrt{z}$.

Solución. Cuando r recorre todo el intervalo $(0,+\infty)$, lo mismo pasa con $\sqrt{r}$, así que el módulo de $\sqrt{z}$ puede ser cualquier número positivo. Los argumentos se reducen a la mitad por esta transformación: $-\pi/2<t/2<\pi/2$. Por tanto, la imagen $f(D)$ es el conjunto de todos los puntos cuyo módulo es arbitrario y cuyo argumento está contenido en el intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$, lo cual representa el semiplano derecho abierto: $f(D)=\{z:\ \mathrm{Re}\,z>0\}$. ■

La función exponencial: $f(z)=e^z$. No es difícil ver que lleva cada recta vertical: $z=a+iy$ ($a\in\mathbb{R}$ fijo) sobre la circunferencia $w=e^a$, ya que $|e^{a+iy}|=e^a$ (es fácil comprobar que cada punto en la circunferencia tiene una preimagen en la recta vertical mencionada). Además, aunque la función exponencial no es inyectiva en las rectas verticales por lo que comentamos en un ejemplo anterior, sí que lo es en cualquier segmento vertical de longitud, como mucho, 2π.

Por otra parte, la exponencial lleva las rectas horizontales: $z=x+bi$ (b real y fijo) en semirrectas desde el origen hasta el infinito que forman el ángulo b con la parte positiva del eje real: en efecto, el número $e^z=e^{x+bi}$ tiene como argumento el número b. Además, el módulo $|e^z|=e^x$ crece desde 0 hasta $+\infty$ cuando x recorre los valores reales y, por tanto, la exponencial es inyectiva en cada una de las rectas horizontales individuales.

Como consecuencia de este análisis, se deduce que la función exponencial es inyectiva en cada banda horizontal abierta de anchura $\le 2\pi$.

Ejercicio 7. *Determine la imagen del "rectángulo infinito" (semi-banda)*

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$$

por la función exponencial: $f(z) = e^z$.

SOLUCIÓN. Por lo arriba expuesto, la función exponencial es inyectiva en R. Considerando el rectángulo R como unión de las semirrectas horizontales $(-\infty, 0) \times \{y\}$, $0 < y < 2\pi$, como consecuencia del análisis anterior, cada semirrecta se transforma por la exponencial en un intervalo abierto situado en la semirrecta de argumento y, desde $0 = e^{-\infty}$ hasta $1 = e^0$. La unión de esos intervalos abiertos cuando y recorre el intervalo $(0, 2\pi)$ es el disco unidad menos el radio $[0,1)$ ya que tenemos que excluir el origen (la exponencial jamás se anula) y los puntos de la forma $e^x = e^{x+2\pi i}$ para $x < 0$, que son justo los puntos del intervalo $(0,1)$ del eje real. ■

La función logaritmo: $f(z) = \log z$. Tal y como hemos visto en clase, puede definirse como función holomorfa en los mismos dominios que la función raíz cuadrada, por ejemplo, en

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi\}$$

y mediante la fórmula $\log(re^{it}) = \ln r + it$ (llamaremos a esta rama del logaritmo la *rama principal*). Es fácil comprobar que esta función es inyectiva en D: a saber, $\ln r + it = \ln \rho + i\theta$, t, $\theta \in (-\pi, \pi)$ se cumple si y sólo si $r = \rho$ y $t = \theta$.

Ejercicio 8. *Determine la imagen del sector angular*

$$R = \{z = x + yi : |y| < x\}$$

por la rama principal del logaritmo, definida arriba.

SOLUCIÓN. Es evidente que

$$R = \{z = x + yi : x > 0, -x < y < x\} = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\} == \left\{z = re^{it} : -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}\right\}$$

Teniendo en cuenta la fórmula $\log(re^{it}) = \ln r + it$, vemos que Re $\{\log z\} = \ln r$ recorre toda la recta real, $(-\infty, \infty)$, cuando r recorre el intervalo $(0, +\infty)$, mientras que Im $\{\log z\} = t$ recorre el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Por tanto,

$$f(R) = \{w : \operatorname{Im} w \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\},$$

la banda horizontal infinita de anchura $\pi/2$, simétrica respecto al eje real. ■

Transformaciones lineales fraccionarias (Transformaciones de Möbius)

Una transformación lineal fraccionaria (también llamada transformación de Möbius) es una función de la forma

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(Es fácil ver que cuando $ad = bc$, resulta que S es constante.)

Un ejemplo es la función vista antes: $S(z) = (z - i)/(z + i)$. En este caso, $ad - bc = 1 \cdot i - 1 \cdot (-i) = 2i \neq 0$.

Las propiedades más importanes de estas transformaciones son las siguientes:

- S es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ y tiene un polo simple en $z=-\frac{d}{c}$.
- Si extendemos S al plano extendido, $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ definiendo

$$S\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty, \qquad S(\infty)=\lim_{z\to\infty}S(z)=\frac{a}{c},$$

entonces S es una función biyectiva de $\hat{\mathbb{C}}$ sobre sí mismo. (En el caso $c=0$, haríamos una modificación obvia: S sería simplemente una función lineal que fija el punto en el infinito.)

- Al ser biyectiva en $\hat{C}$, cada función lineal fraccionaria preserva los ángulos entre curvas (es conforme).
- El conjunto $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ o $TLF(\hat{\mathbb{C}})$ de todas las transformaciones lineales fraccionarias es un grupo respecto a la operación de composición; es decir, la composición de dos TLFs es otra aplicación del mismo tipo y también lo es la inversa de una transformación de Möbius.
- Una transformación de Möbius queda completamente determinada por las imágenes de tres puntos: es decir, dados tres puntos distintos: a, b, $c\in\hat{\mathbb{C}}$ y otros tres puntos distintos A, B, $C\in\hat{\mathbb{C}}$, siempre existe una transformación lineal fraccionaria, S, tal que $S(a)=A$, $S(b)=B$ y $S(c)=C$ y es única. En particular, existe una única transformación $T\in\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $T(a)=0$, $T(b)=1$ y $T(c)=\infty$.
- Cada aplicación lineal fraccionaria lleva una circunferencia o recta en una circunferencia o recta. (Si un punto perteneciente a la circunferencia o recta en cuestión se va al ∞, la imagen es una recta y, si ningún punto se va al ∞, entonces la imagen es una circunferencia.)
- Por tanto, esas transformaciones llevan un dominio del siguiente grupo: un disco, un semiplano o el exterior de un disco (en $\hat{\mathbb{C}}$) a otro dominio del mismo tipo. Además, son las funciones holomorfas más sencillas posibles con esta propiedad. De ahí su gran utilidad en la construcción de aplicaciones holomorfas y biyectivas de un dominio sobre otro.

Ejercicio 9. *Encuentre la transformación de Möbius T con las siguientes propiedades:*

$$T(1)=1, \quad T(i)=0, \quad T(-i)=\infty.$$

Después halle el dominio $T(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D}$ denota al disco unidad.

SOLUCIÓN. Por una de las propiedades mencionadas arriba, sabemos que existe una T con las propiedades indicadas y que es única. Buscamos una T con $z-i$ en el numerador y $z+i$ en el denominador. Por lo tanto,

$$T(z)=c\frac{z-i}{z+i}$$

para cierta constante compleja, c, que debemos determinar a partir de la condición $T(1)=1$:

$$1=T(1)=c\frac{1-i}{1+i}=c\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=c\frac{-2i}{2}=-ic,$$

luego $c=i$. Finalmente,

$$T(z)=i\,\frac{z-i}{z+i}.$$

Al ser T una transformación lineal fraccionaria, la imagen por T de la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, es o bien una circunferencia o una recta. Puesto que los puntos 1, i y $-i$ pertenecen a $\mathbb{T}$ y $T(-i) = \infty$, se sigue que la imagen $T(\mathbb{T})$ es una recta. Dicha recta pasa por $T(1) = 1$ y $T(i) = 0$, así que se trata del eje real, $\mathbb{R}$. Por conexión y continuidad, el conjunto $T(\mathbb{D})$ tiene que ser uno de los dos semiplanos delimitados por el eje real. ¿Cuál? Como $0 \in \mathbb{D}$, veamos a dónde va a parar el origen: $T(0) = -i$, así que está en el semiplano inferior, $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Conclusión: $T(\mathbb{D}) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. ■

Ejercicio 10. *Determine la imagen del disco unidad por la transformación de Möbius* $\ell(z) = \frac{1+z}{1-z}$. *Lo mismo para el semidisco superior:* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 |z| < 1\}$.

Solución. Es claro que ℓ transforma la recta real en sí misma (con el punto en el ∞ añadido) ya que $\ell(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y $\ell(1) = \infty$. La transformación también aplica la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$, en un recta dado que $1 \in \mathbb{T}$. Puesto que ℓ es conforme y el ángulo entre la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$, y la recta real, $\mathbb{R}$, es $\pi/2$, las imágenes $\ell(\mathbb{T})$ y $\ell(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ también forman un ángulo de $\pi/2$. Por tanto, la recta $\ell(\mathbb{T})$ es perpendicular al eje real. Teniendo en cuenta que $-1 \in \mathbb{T}$ y $\ell(-1) = 0$, se sigue que $\ell(\mathbb{T})$ es el eje imaginario. Por continuidad y conexión, $\ell(\mathbb{D})$ tiene que ser uno de los semiplanos que tiene el eje imaginario como frontera (el izquierdo o el derecho). Pero $0 \in \mathbb{D}$ y $\ell(0) = 1$, así que se trata del semiplano derecho (abierto).

Consideremos ahora la restricción de ℓ al semidisco superior, Ω. La frontera $\partial\Omega$ consiste en la semicircunferencia superior y el intervalo $(-1, 1)$ del eje real. ℓ lleva la semicircunferencia a una parte del eje imaginario; dado que $\ell(-1) = 0$ y $\ell(i) = i$, se trata de la parte positiva del eje imaginario: $\{iy : y > 0\}$. Para $-1 < x < 1$ tenemos que $\ell(x) = (1 + x)/(1 - x) > 0$, luego ℓ lleva el diámetro $(-1, 1)$ sobre la parte positiva del eje real. Por tanto, la imagen del semidisco superior por ℓ, que tiene que ser un subdominio del semiplano derecho por el apartado anterior, sólo puede ser el primer cuadrante. ■

Ejercicio 11. *Determine la imagen por la transformación lineal fraccionaria* $f(z) = \frac{1}{z}$ *del siguiente dominio:*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}.$$

Solución. El dominio D está delimitado por dos rectas paralelas, el eje real y la recta $y = \pi$. Por tanto, f las transformará en dos curvas que también forman ángulo cero, siendo cada una de ellas recta o circunferencia. Para $x \in \mathbb{R}$, es obvio que $f(x) = 1/x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Puesto que el punto 0 no pertenece a la recta $y = \pi$, su imagen por f no puede ser una recta (ningún punto se va al ∞), así que es una circunferencia. Esa circunferencia pasa por $0 = f(\infty)$ y por $f(\pi) = -i/\pi$. Además, es fácil ver que la recta $y = \pi$ va al eje imaginario, así que se sigue que el intervalo desde 0 hasta $-i/\pi$ es el diámetro de la circunferencia; por tanto, se trata de la circunferencia $\{z : |z + \frac{i}{2\pi}| = \frac{1}{2\pi}\}$. Se deduce de aquí que $f(D)$ es el dominio acotado por el eje real y esta circunferencia, es decir:

$$f(D) = \{z : \left|z + \frac{i}{2\pi}\right| > \frac{1}{2\pi}, \ \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Transformaciones (aplicaciones) conformes en general

Teorema de la aplicación (representación, transformación) conforme de Riemann. *Sea* Ω *un dominio simplemente conexo en el plano tal que* $\Omega \neq \mathbb{C}$. *Entonces existe, al menos, una función holomorfa y biyectiva* $f : \Omega \to \mathbb{D}$, *donde* $\mathbb{D}$ *es el disco unidad.*

Si $a \in \Omega$ y, además, pedimos que $f(a) = 0$ y $f'(a)$ sea un número real y positivo (o de un argumento prescrito) entonces tal aplicación f es única.

La prueba de este resultado fundamental es larga y requiere técnicas que no se han visto en este curso, por ejemplo, las familias normales y problemas extremales. Suele desmotrarse en el curso de Variable Compleja II.

Observaciones. (1) Si existe una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω sobre $\mathbb{D}$, entonces su inversa también lo es, por el Teorema de la función inversa, luego la aplicación es un homeomorfismo. Por tanto, Ω tiene que ser un dominio simplemente conexo para que tal transformación exista.

(2) Ω no puede ser todo el plano ya que, por el teorema de Liouville, no puede existir ninguna función entera que lleve el plano al disco y que no sea constante.

(3) La unicidad no está garantizada sin las hipótesis adicionales, así que en varios ejemplos anteriores las aplicaciones encontradas que llevaban un dominio a otro no eran únicas; existen otras con esas características.

Ejercicio 12. *Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva entre el dominio tipo "media luna":*

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \, |z| < 1 \, , \, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$$

y la banda horizontal $G = \{z \in \mathbb{C} : \, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

SOLUCIÓN. Para comenzar, el dominio Ω es simplemente conexo y está comprendido entre dos circunferencias que se tocan en el punto $z = 1$, siendo una de ellas la circunferencia unidad y la otra, la circunferencia interior C de radio $1/2$ centrada en el punto $1/2$. El ángulo entre ellas es cero ya que comparten la tangente en $z = 1$ (que es precisamente la recta $x = 1$). Por tanto, una transformación lineal fraccionaria que lleve el punto indicado al ∞ transformará ambas circunfrencias en dos rectas paralelas y éste será un buen punto de partida.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente LFT:

$$S(z) = \frac{z+1}{z-1} .$$

Obviamente, esta transformación cumple $S(1) = \infty$, así que nos será útil. La transformación S claramente lleva los reales a los reales (más el punto ∞). Puesto que S preserva los ángulos y la recta real es perpendicular a la circunferencia unidad, $\mathbb{T}$, se sigue que los conjuntos $S(\mathbb{T})$ y $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ también son perpendiculares. Concluimos de aquí que $S(\mathbb{T})$ es una recta perpendicular al eje real (una recta vertical), así que, para identificarla, sólo necesitamos conocer un punto en ella. Puesto que $i \in \mathbb{T}$ y es fácil ver que

$$S(i) = \frac{i+1}{i-1} = -i .$$

De aquí se sigue que $S(\mathbb{T})$ es la recta vertical que pasa por $-i$, es decir, el eje imaginario.

Determinemos ahora la imagen por S de la circunferencia C de radio $1/2$ centrada en el punto $1/2$. Por el mismo razonamiento que antes, se trata de una recta vertical. Como $0 \in C$, es la recta vertical que pasa por $S(0) = -1$, o sea, es $\{z \in \mathbb{C} : \, \operatorname{Re} z = -1\}$. Se sigue que la imagen de la región Ω por S es la banda vertical

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \, -1 < \operatorname{Re} z < 0\} .$$

A continuación aplicamos la traslación $\tau(z) = z + 1$ para llevar la banda B sobre la banda

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \, 0 < \operatorname{Re} z < 1\} .$$

Finalmente, multiplicamos por $i = e^{(\pi i)/2}$ para rotar la banda D por un ángulo de $\pi/2$ y así transformarla en la banda deseada, G.

Recapitulando, hemos aplicado primero S, luego τ y después la rotación $\rho(z) = iz$ para llevar Ω sobre G, así que la aplicación que buscamos es $T = \rho\circ\tau\circ S$, una composición de tres aplicaciones lineales fraccionarias. Como éstas forman un grupo, la transformación T también es del mismo tipo. ■

Ejercicio 13. *Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del disco unidad sobre el semidisco superior:* $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$.

Solución. Basta encontrar una aplicación analítica y biyectiva de Ω sobre el disco y luego invertirla. En el Ejercicio **10** vimos que la aplicación $\ell(z) = (1+z)/(1-z)$ aplica Ω sobre el primer cuadrante y es biyectiva. La función $f(z) = z^2$ lleva el primer cuadrante al semiplano superior abierto, $\mathbb{H}$ (Ejercicio **5**) y también es biyectiva. Finalmente, la aplicación de Möbius $S(z) = (z-i)/(z+i)$ transforma $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{D}$ y es biyectiva (Ejercicio **4**).

Componiendo las tres aplicaciones, la función $F = S\circ f\circ\ell$ transforma Ω sobre $\mathbb{D}$, es analítica y biyectiva, así que su inversa tendrá las propiedades que buscamos. Ejercicio: escriba la fórmula explícita para F^{-1}. ■

Ejercicio 14. *Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del disco con un corte a lo largo del radio* $[0,1)$ *sobre el disco unidad.*

Solución. Como hemos visto en el ejercicio anterior, $F = S\circ f\circ\ell$ (usando la misma notación) transforma el semidisco superior $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ sobre $\mathbb{D}$. Sólo nos falta encontrar una aplicación de $\mathbb{D}\setminus[0,1)$ sobre Ω para completar el proceso.

La transformación lineal $f(z) = -z$ (simetría respecto al origen) lleva $\mathbb{D}\setminus[0,1)$ sobre el dominio similar

$$E = \mathbb{D}\setminus[0,-1) = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1,\ -\pi < \arg z < \pi\}$$

y un simple razonamiento parecido al del Ejercicio **6** nos muestra que la transformación raíz cuadrada: $g(z) = \sqrt{z}$ se puede definir como función holomorfa e inyectiva en E y que lo transforma en

$$U = \left\{z\in\mathbb{C} : |z| < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\},$$

el semidisco derecho. La rotación $\rho(z) = iz$ transforma U en el semidisco superior Ω. Por tanto, una transformación con las propiedades deseadas es

$$G = F\circ\rho\circ g\circ f = S\circ f\circ\ell\circ\rho\circ g\circ f : \mathbb{D}\setminus[0,1)\to\mathbb{D}. \qquad ■$$

<u>Automorfismos conformes del disco unidad</u>. Sea $a\in\mathbb{D}$; es decir, $|a| < 1$. Consideremos la siguiente aplicación lineal fraccionaria:

$$\phi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Dicha función, restringida al disco unidad, se llama el *automorfismo involución del disco*, por las razones que se explicarán a continuación.

Ejercicio 15. *Sea $a \in \mathbb{D}$. Compruebe que la aplicación analítica y biyectiva, f, del disco unidad, $\mathbb{D}$, sobre sí mismo tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) < 0$ cuya existencia y unicidad están garantizadas por el Teorema de Riemann, es precisamente $f = \phi_a$.*

SOLUCIÓN. Sabiendo que tal f es única, sólo necesitamos comprobar que ϕ_a tiene todas las propiedades que buscamos. Obviamente, ϕ_a es una transformación de Möbius no constante y, por tanto, es inyectiva.

Observemos primero que, debido a la cancelación del término $2\mathrm{Re}\{\overline{a}z\}$, tenemos que

$$1 - |\phi_a(z)|^2 = 1 - \frac{|a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{|1-\overline{a}z|^2 - |a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1+|az|^2 - |a|^2 - |z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Dado que el denominador es positivo y $1-|a|^2 > 0$, se sigue que

$$|\phi_a(z)| < 1 \Longleftrightarrow 1 - |\phi_a(z)|^2 > 0 \Longleftrightarrow 1 - |z|^2 > 0 \Longleftrightarrow |z| < 1.$$

Esto nos dice que $\phi_a(z) \in \mathbb{D}$ si y sólo si $z \in \mathbb{D}$; es decir, $\phi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. (De la misma forma, puede verse que $\phi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, por ejemplo.)

Puede comprobarse directamente que $\phi_a(\phi_a(z)) = z$. Es decir, ϕ_a es su propia inversa o lo que llamamos una *involución*. Por tanto, para cada $w \in \mathbb{D}$, el punto $\phi_a(w) \in \mathbb{D}$ es su preimagen por ϕ_a, así que ϕ_a es suprayectiva: $\phi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Se comprueba mediante un cálculo directo que, además, $\phi_a(a) = 0$ y

$$\phi_a'(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, \qquad \phi_a'(a) = -\frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)^2} = -\frac{1}{1-|a|^2} < 0.$$

Por tanto, ϕ_a cumple todas las condiciones necesarias. ■

Existen otros automorfismos del disco (aplicaciones holomorfas y biyectivas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que son más sencillos: las rotaciones, $\rho_\lambda(z) = \lambda z$, donde $|\lambda| = 1$. Por tanto, toda transformación de la forma

$$f(z) = \lambda\phi_a(z) = (\rho_\lambda \circ \phi_a)(z), \quad |a| < 1, \quad |\lambda| = 1,$$

es un automorfismo del disco. Más adelante veremos que no existe ningún otro automorfismo del disco. Los automorfismos nos ayudan, entre otras cosas, a mover los puntos dentro del disco y así conseguir no sólo una transformación conforme que lleve un dominio sobre el disco sino que además tenga un valor prescrito.

Ejercicio 16. *Demuestre que, para dos puntos $a, b \in \mathbb{D}$ cualesquiera pero distintos, existe un automorfismo f del disco y un número r, $0 < r < 1$, tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = r$.*

SOLUCIÓN. Obviamente, cualquier automorfismo de la forma $f(z) = \lambda\phi_a(z)$ tendrá la propiedad $f(a) = 0$. Queda por encontrar un número λ de módulo uno tal que $f(b) = \lambda\phi_a(b) = r$. Esto es equivalente a $\lambda = r/\phi_a(b)$. Observemos que ϕ_a es inyectiva y $\phi_a(a) = 0$, luego $\phi_a(b) \neq 0$. Para que se cumpla la igualdad deseada, debemos elegir $r = |\phi_a(b)| > 0$. ■

Ejercicio 17. *Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$. Encuentre una aplicación f holomorfa y biyectiva del dominio Ω sobre el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. ¿Cuántas aplicaciones existen con las propiedades indicadas? Razone la respuesta.*

SOLUCIÓN. Geométricamente, Ω representa la banda horizontal abierta

$$\{z = x + yi : \; x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1\}$$

y, por tanto, es un dominio simplemente conexo. El Teorema de la aplicación conforme de Riemann garantiza la existencia y unicidad de una aplicación f con las propiedades exigidas. El problema se reduce a encontrar una aplicación con esas características.

En general, cuando se desea transformar un dominio simplemente conexo Ω en el disco $\mathbb{D}$ de manera que un punto $a \in \Omega$ vaya al origen y que la derivada en a sea positiva, basta encontrar cualquier aplicación conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y luego multiplicarla por la constante apropiada de módulo uno (es decir, aplicarle una rotación) para que la derivada en el origen sea positiva, ya que las rotaciones transforman el disco sobre sí mismo. (En esta solución, debido a la elección conveniente de la función f, ni siquiera va a ser necesario dar ese último paso.)

Comenzamos transformando nuestra banda horizontal Ω de anchura 2 en otra similar pero de anchura π, utilizando la trasnformación $g(z) = \frac{\pi}{2} z$. Ésta transforma Ω sobre el dominio $\Omega_1 = \{w : \; |\operatorname{Im} w| < \pi/2\}$.

Luego utilizamos la función exponencial $h(w) = e^w$ para transformar Ω_1 en el semiplano derecho

$$\Omega_2 = \{\zeta : \; \operatorname{Re}\zeta > 0\}.$$

Para justificar esto, basta recordar que ya hemos visto que la función inversa de h, una rama del logaritmo, transforma Ω_2 en Ω_1 mediante la fórmula $\log(re^{it}) = \log r + it$, siendo $r > 0$ y $-\pi/2 < t < \pi/2$. (Alternativamente, podemos considerar las imágenes por h de los intervalos verticales $w = c + it$, $c \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$ y ver que son semicircunferencias en el semiplano derecho centradas en el origen, para llegar a la misma conclusión.)

Finalmente, utilizamos la transformación de Möbius $T(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$ para transformar Ω_2 sobre el disco unidad $\mathbb{D}$.

Es fácil comprobar que las funciones g y T son univalentes en todo su dominio, mientras que la exponencial h lo es en el dominio Ω_1 que nos interesa. Por consiguiente, la composición $f = T \circ h \circ g$ también es inyectiva y analítica en Ω y transforma Ω sobre $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \frac{e^{\pi z/2} - 1}{e^{\pi z/2} + 1}.$$

Se comprueba inmediatamente que $f(0) = 0$. Asimismo,

$$f'(z) = \frac{\pi e^{\pi z/2}}{(e^{\pi z/2} + 1)^2}.$$

con lo cual $f'(0) = \pi/4 > 0$. Ahora ya sabemos que nuestra f es la aplicación deseada.

Obviamente, existen otros procedimientos para llegar a la misma f mediante unas composiciones aparentemente más complicadas, pero todas ellas tendrán que coincidir, debido a la unicidad en el teorema de Riemann.
■

Ejercicios de tipo combinado que involucran aplicaciones conformes y otros resultados

Ejercicio 18. *Demuestre que todo automorfismo conforme de $\mathbb{D}$ (es decir, toda función holomorfa y biyectiva de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$) es de la forma $f(z) = \lambda\phi_a(z)$, donde $|\lambda| = 1$, $a \in \mathbb{D}$ y ϕ_a es como antes.*

SOLUCIÓN. Dado que f es biyectiva, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$. Sea $g = f \circ \phi_a$. Entonces $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $g(0) = f(a) = 0$. Por tanto, g cumple las condiciones del Lema de Schwarz, así que $|g'(0)| \le 1$.

Al ser g la composición de dos automorfismos del disco, también es un automorfismo, luego también lo es g^{-1}, por el Teorema de la función inversa, y fija el origen. Aplicando el Lema de Schwarz a $h = g^{-1}$, por el Teorema de la función inversa se sigue que

$$|h'(0)| = \frac{1}{|g'(0)|} \le 1,$$

así que $|g'(0)| = 1$. Puesto que se cumple la igualdad en el Lema de Schwarz, g es una rotación: $g(z) = \lambda z$, para cierto λ con $|\lambda| = 1$ y para todo $z \in \mathbb{D}$. Es decir, $f(\phi_a(z)) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Recordando que ϕ_a es una aplicación biyectiva de $\mathbb{D}$ y una involución y escribiendo $w = \phi_a(z)$, se sigue que $f(w) = \lambda \phi_a(w)$ para todo $w \in \mathbb{D}$, que es justo lo que queríamos demostrar. ■

Ejercicio 19. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, además, $f(0) = 1$. Demuestre que*

$$|f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

SOLUCIÓN. La idea fundamental consiste en aplicar el Lema de Schwarz; la clave está en hacerlo de forma correcta. Esto se puede conseguir llevando el semiplano derecho $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ al disco unidad mediante la aplicación conocida T, dada por

$$T(w) = \frac{1-w}{1+w},$$

de modo que la función $g = T \circ f$ cumple las condiciones del lema de Schwarz:

1. g es analítica en $\mathbb{D}$, al ser la composición de dos funciones analíticas;
2. $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, ya que $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ y $T(\Omega) \subset \mathbb{D}$;
3. $g(0) = T(f(0)) = T(1) = 0$.

Por lo tanto, $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir,

$$\left| \frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right| \le |z|.$$

Ahora despejamos esta desigualdad concuidado, utilizando la desigualdad triangular en $\mathbb{C}$:

$$|f(z)| - 1 \le |1 - f(z)| \le |z| \cdot |1 + f(z)| \le |z|(1 + |f(z)|) \le |z| + |z| \cdot |f(z)|.$$

Comparando la primera y la última cantidad en esta cadena de desigualdades y agrupando los términos, obtenemos finalmente

$$(1-|z|)\,|f(z)| \le 1 + |z|,$$

que es la desigualdad deseada. ■

Ejercicio 20. *(a) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) = a$ y*

$$f(z) \neq \frac{1}{\overline{a}}, \qquad \left|\frac{a - f(z)}{1 - \overline{a} f(z)}\right| \leq 1, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demuéstrese que

$$|f'(0)| \leq 1 - |a|^2.$$

(b) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y f tiene un punto fijo p en $\mathbb{D}$, Demuestre que entonces

$$\left|\frac{p - f(0)}{1 - \overline{p} f(0)}\right| \leq |p|.$$

SOLUCIÓN. Consideremos la función compuesta

$$g(z) = \phi_a(f(z)) = \frac{a - f(z)}{1 - \overline{a} f(z)}.$$

Esta nueva función obviamente está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{D}$. Además cumple $|g(z)| \leq 1$ para todo z en $\mathbb{D}$ (por hipótesis) y $g(0) = \phi_a(f(0)) = \phi_a(a) = 0$. Podemos aplicar el Lema de Schwarz para concluir que $|g'(0)| \leq 1$. El cálculo directo nos muestra que

$$g'(0) = \phi_a'(f(0)) \cdot f'(0) = \phi_a'(a) \cdot f'(0) = -\frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a} a)^2} f'(0) = -\frac{f'(0)}{1 - |a|^2}$$

y la afirmación se sigue.

(b) Conviene definir $F = \phi_p \circ f \circ \phi_p$, donde ϕ_p es el automorfismo involución habitual: $\phi_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p} z}$. Esta nueva función es holomorfa en $\mathbb{D}$, lleva $\mathbb{D}$ en sí mismo y cumple

$$F(0) = \phi_p(f(\phi_p(0))) = \phi_p(p) = 0,$$

ya que $f(p) = p$ por hipótesis. El Lema de Schwarz implica que $|F(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, cuando $z = p$ tenemos que

$$|\phi_p(f(0))| = |\phi_p(f(\phi_p(p)))| \leq |p|,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Preparado por

Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura