Variable Compleja I ($3^{\underline{o}}$ de Matemáticas)

Apuntes sobre algunos teoremas "cualitativos" de análisis complejo, con ejercicios resueltos, 2014-15

Teorema de Rouché. Principio del argumento

Principio del argumento. *Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno (curva cerrada y simple, C^1 a trozos, también denominada camino) contenida en Ω junto con el dominio que acota y orientada positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en γ y sus ceros en el dominio interior a γ son $a_1, \ldots, a_N$ (contando las multiplicidades), entonces*

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \operatorname{Ind}(0; f(\gamma)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f\,,$$

donde

$$\operatorname{Ind}(0; f(\gamma)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w}$$

denota al índice de la curva imagen, $f(\gamma)$, respecto al origen (el número de vueltas que da $f(\gamma)$ alrededor del origen) y $\Delta_\gamma \arg f$ denota la variación total del argumento del punto $f(z)$ cuando z recorre la curva γ.

Teorema de Rouché. *Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno (curva cerrada y simple, C^1 a trozos, también denominada camino) contenida en Ω junto con el dominio que acota. Si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $|f(z)| > |g(z)|$ para todo z en γ, entonces las funciones f, $f - g$ y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a la curva γ:*

$$N_\gamma(f) = N_\gamma(f - g) = N_\gamma(f + g)\,,$$

contando las multiplicidades.

Ejercicio 1 *Halle el número de soluciones de la ecuación $3z^4 + 7z^3 - z + 2 = 0$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ y en su exterior $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.*

Solución. Sean $f(z) = 7z^3$ y $g(z) = 3z^4 - z + 2$. Ambas son enteras y en la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1$, cumplen la desigualdad

$$|f(z)| = 7 > 6 \geq 3|z|^4 + |-z| + 2 \geq |3z^4 - z + 2| = |g(z)|$$

por la desigualdad triangular. Por tanto, tenemos en $\mathbb{T}$ la desigualdad estricta $|f(z)| > |g(z)|$ y podemos aplicar el <u>Teorema de Rouché</u>. Según dicho resultado, el número de ceros de la función $(f+g)(z) = 3z^4 + 7z^3 - z + 2$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es igual al de la función f. Ya sabemos que éste es igual a 3, teniendo en cuenta las multiplicidades. Por tanto, la función $f + g$ tiene 3 ceros en $\mathbb{D}$.

Al ser un polinomio de grado 4, la función $f + g$ tiene 4 ceros en el plano, contando las multiplicidades. Es fácil ver que no tiene ningún cero en el círculo unidad $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$; esto se sigue de la desigualdad demostrada arriba y la desigualdad triangular: $|f + g| \geq |f| - |g| > 0$ en $\mathbb{T}$. Por tanto, sólo tiene un cero en el exterior del disco.

Ejercicio 2 *Sea Ω un dominio plano que contiene al disco unidad, $\mathbb{D}$ y f una función holomorfa en Ω tal que $|f(z)| < 1$ para todo z que cumple $|z| = 1$. Demuestre que f tiene en $\mathbb{D}$ exactamente un punto fijo (un punto a tal que $f(a) = a$).*

Solución. Decir que a es un punto fijo de f es equivalente a decir que a es una solución de la ecuación $z - f(z) = 0$. El Teorema de Rouché nos ayudará a contar el número de ceros de esta función en $\mathbb{D}$. Dado que en la circunferencia unidad las funciones f y z, ambas holomorfas en Ω, cumplen la desigualdad estricta $|f(z)| < 1 = |z|$, se sigue por Rouché que $z - f(z)$ tiene en $\mathbb{D}$ el mismo número de ceros que la función identidad, que es exactamente uno. ■

Ejercicio 3 *Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:*
(a) en el semiplano derecho $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.
(b) en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Solución. Antes que nada, observemos que, al ser p un polinomio de grado 4, tiene que tener exactamente cuatro soluciones complejas, teniendo en cuenta las posibles multiplicidades. Ninguno de esos ceros puede ser real ya que para un número real x la igualdad $p(x) = 0$ implicaría $x^4 + 1 = 0$ (igualando las partes real e imaginaria a cero), lo cual es imposible.

(a) Este apartado admite una solución elemental, debido a sus características singulares. En general, dado que p no tiene todos los coeficientes reales, de ninguna manera se sigue que si z_0 es una raíz, entonces $\overline{z}_0$ también lo es. No obstante, es fácil observar que si z_0 es una raíz, entonces $-\overline{z}_0$ es otra. En efecto, si $p(z_0) = 0$, conjugando la ecuación, obtenemos

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{z}_0^4 - i\overline{z}_0 + 1 = \overline{(-z_0)}^4 + i \cdot (\overline{-z}_0) + 1 = p(-\overline{z}_0)\,.$$

Geométricamente, es fácil ver que si z_0 está en el semiplano derecho, entonces $-\overline{z}_0$ está en el izquierdo y viceversa. Por tanto, el número de ceros en el semiplano izquierdo es igual al número de ceros en el semiplano derecho. Como en total hay 4 y también es fácil comprobar que p no tiene ceros en el eje imaginario, tiene que haber exactamente dos ceros de p en el semiplano derecho y otros dos en el izquierdo.

(b) Aquí seguiremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio "suficientemente grande" y contenido en el semiplano superior.

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo. Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R, R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\operatorname{Re} p(x) \geq 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (tiene una "pequeña" variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir

$$p(z) = z^4 (1 + \frac{i}{z^3} + \frac{1}{z^4})\,.$$

Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = R\, e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, con lo cual $z^4 = R^4\, e^{4it}$ y $0 \le 4t \le 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos.

(Comentario: otros métodos de solución son posibles.)

Teorema de la aplicación abierta, principio del módulo máximo, lema de Schwarz

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Entonces o bien $f \equiv cte$ o bien f es una aplicación abierta (es decir, para todo $U \subset \Omega$ abierto en el plano, el conjunto $f(U)$ es también abierto.*

Ejercicio 4 *Explique razonadamente por qué, si f es holomorfa en un dominio Ω, es imposible que $f(\Omega) = \mathbb{R}$.*

Solución. El conjunto $\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{C}$ ya que no contiene a ningún disco. Según el Teorema de la aplicación abierta, sabemos que o bien f es abierta, en cuyo caso $f(\Omega)$ es abierto y no puede ser $\mathbb{R}$, o bien es constante, en cuyo caso $f(\Omega)$ es un conjunto que consiste en un único punto y, por tanto, tampoco puede ser $= \mathbb{R}$. ■

Ejercicio 5 *Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω donde cumple $|f(z)| \le 1$ entonces, de hecho, $|f(z)| < 1$ en Ω. Razone por qué.*

Solución. Supongamos que $|f(a)| = 1$ para cierto $a \in \Omega$. Sea $b = f(a)$. Puesto que f no es constante, es una aplicación abierta y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto. Dado que $b \in f(\Omega)$, existe un radio $r > 0$ tal que el disco abierto $D(b;r) = \{z : |w - b| < r\}$ está contenido en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $|b| = 1$, es obvio que el disco $D(b;r)$ contiene un punto c tal que $|c| > 1$; por ejemplo, podemos tomar $c = (1 + \frac{r}{2|b|})b$ ya que $|b - c| = \frac{r}{2} < r$. Pero $c \in D(b;r) \subset f(\Omega)$ así que $c = f(z)$ para cierto $z \in \Omega$ y $|f(z)| = |c| = |b| + \frac{r}{2} = 1 + \frac{r}{2} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, concluimos que $|f(z)| < 1$ para todo z en Ω. ■

Principio del módulo máximo (Primera versión). *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ alcanza su máximo en un punto del dominio Ω, entonces $f \equiv cte$. (Dicho en un lenguaje menos formal, la gráfica de la función $|f|$ vista como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se erige sobre el dominio Ω en el plano es un "paisaje sin picos".)*

Principio del módulo máximo (Segunda versión). *Sea Ω un dominio acotado en el plano y f una función holomorfa en Ω y continua en su cierre, $\overline{\Omega}$. (Obsérvese que, obviamente, la función continua $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$.) Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)| \,.$$

Es decir, el módulo máximo en este caso sólo se puede alcanzar en el borde del dominio si f no es constante. (Si es constante, se alcanza trivialmente en todo $\overline{\Omega}$.)

Ejercicio 6 *Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad y $\overline{\mathbb{D}}$ su cierre. Sea f una función no constante, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Sólo una de las siguientes situaciones es posible. ¿Cuál de ellas?*

(a) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = -3$;
(b) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(1) = 3$;
(c) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$;
(d) Se cumple $f(1/2) = 4$; ademas, si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $f(x + iy) = 3$.

Solución. Dado que $f \neq cte$, las condiciones (a), (c) y (d) contradicen al Principio del módulo máximo (en su segunda versión) ya que todos los valores en los puntos concretos en el dominio resultan ser números de módulo uno, mientras que (b) es posible, siendo el punto $z = 1$ un punto del borde del dominio. Un ejemplo concreto sería la función $f(z) = z + 2$ que cumple las condiciones del apartado (b). ■

Ejercicio 7 *Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \leq 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$.*

Solución. Si f es constante, digamos $f \equiv C$, entonces $|C| \leq 1 - |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Dejando que $|z| \to 1^-$, obtenemos $|C| \leq 0$ y se deduce que $C = 0$, lo cual prueba la afirmación del problema.

Nos queda ver que es imposible el caso de una función f no constante. La idea principal consiste en demostrar que, bajo las hipótesis del problema, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dejando que $\varepsilon \to 0^+$, esto implicará que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Para completar esta reducción al absurdo, sólo nos queda hacer demostrar de forma rigurosa la afirmación "para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$".

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si $|z| > 1 - \varepsilon$, entonces por las hipótesis del problema, $|f(z)| \leq 1 - |z| < \varepsilon$. Veamos qué es lo que ocurre en el resto del disco, es decir, cuando $|z| \leq 1 - \varepsilon$. El conjunto $K_\varepsilon = \{z : |z| \leq 1 - \varepsilon\}$ es cerrado y acotado y, por tanto, compacto así que la función continua $|f|$ alcanza en él su máximo:

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

para cierto $z_0 \in K_\varepsilon$. Si este máximo fuera $\geq \varepsilon$, entonces el módulo máximo de $|f|$ en $\mathbb{D}$ sería justo $|f(z_0)|$ ya que en el resto f tiene módulo menor que ε. Pero el Principio del módulo máximo (en su primera versión, ya que la función no está definida en el borde de $\mathbb{D}$) nos dice que una función holomorfa y no constante no puede alcanzar su módulo máximo en un punto del dominio (en este caso, no puede hacerlo en z_0). Por lo tanto, se sigue que

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| < \varepsilon$$

y, por tanto, $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto completa la demostración. ■

Lemma de Schwarz. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, que cumple las siguientes condiciones: $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo z en $\mathbb{D}$. Entonces:*

(a) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
(b) $|f'(0)| \leq 1$.

Si se cumple la igualdad en (a) para un $z \neq 0$ o en (b), entonces f es una rotación: $f(z) = \lambda z$ para cierto número λ tal que $|\lambda| = 1$.

Por lo que comentamos en un ejercicio anterior, la hipótesis "$|f(z)| \leq 1$ para todo z en $\mathbb{D}$" en el Lema de Schwarz es equivalente a la aparentemente más fuerte "$|f(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$". Por eso con frecuencia también enunciamos el Lema de Schwarz con la hipótesis $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Ejercicio 8 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq |z + 3/2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que $|f(1/2)| \leq 1$ y hállense todas las funciones para las que se cumple la igualdad.*

Solución. Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = \frac{f(z)}{z + 3/2}.$$

Dado que $z \neq -3/2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, $g(0) = 0$, así que podemos aplicar el Lema de Schwarz a esta función para deducir que $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $|f(z)| \leq |z + 3/2|$. En particular, para $z = 1/2$, se obtiene que $|f(1/2)| \leq 1$.

Si se cumple la igualdad en $|f(1/2)| \leq 1$, esto significa que $|g(1/2)| = 1/2$ y, por tanto, tenemos la igualdad en el Lema de Schwarz. Sabemos que esto sólo es posible cuando $g(z) = cz$, $c = cte$, $|c| = 1$, es decir, cuando $f(z) = cz(z + 3/2)$, $|c| = 1$.

Ejercicio 9 *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = f'(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo z en el disco unidad. Demuestre que, de hecho, $|f(z)| \leq |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Solución. Conviene definir la función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ f'(0) = 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Puesto que

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = g(0),$$

la función g tiene una singularidad evitable en el origen y es continua en ahí. Por tanto, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Además, podemos aplicar el lema de Schwarz a f para deducir que $|f(z)| \leq |z|$ en $\mathbb{D}$. Por consiguiente,

$$|g(z)| \leq 1 \text{ en } \mathbb{D} \quad \text{y} \quad g(0) = f'(0) = 0$$

Aplicando de nuevo el lema de Schwarz pero esta vez a la función g, obtenemos que $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Cuando $z \neq 0$, esto implica que $|f(z)| \leq |z|^2$. Para $z = 0$, esta desigualdad se cumple trivialmente (es una igualdad). ■

Transformaciones (aplicaciones) conformes

Teorema de la aplicación (representación, transformación) conforme de Riemann. *Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano tal que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Entonces existe, al menos, una función holomorfa y biyectiva $f : \Omega \to \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unidad. Si $a \in \Omega$ y, además, pedimos que $f(a) = 0$ y $f'(a)$ sea un número real y positivo (o de un argumento prescrito) entonces tal aplicación f es única.*

Ejercicio 10 *Hállese una aplicación holomorfa y biyectiva del semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ sobre el disco unidad $\mathbb{D}$ mediante un razonamiento geométrico, sin realizar cálculos.*

Solución. Los puntos i y $-i$ son simétricos respecto al eje real. Por tanto, un punto z está en $\mathbb{H}$ si y sólo si dista más del punto i que del punto $-i$; es decir,

$$z \in \mathbb{H} \Leftrightarrow |z - i| < |z + i| \Leftrightarrow \left|\frac{z - i}{z + i}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D}\,.$$

Esto nos dice que la transformación lineal fraccionaria (transformación de Möbius) $S(z) = (z-i)(z+i)$ transforma $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{D}$. Cualquier función de ese tipo es también inyectiva, luego S es una de las transformaciones buscadas. ■

Ejercicio 11 *Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$. Encuentre una aplicación f holomorfa y biyectiva del dominio Ω sobre el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. ¿Cuántas aplicaciones existen con las propiedades indicadas? Razonar la respuesta.*

Solución. Geométricamente, Ω representa la banda horizontal abierta

$$\{z = x + yi : x \in \mathbb{R}\,, -1 < y < 1\}$$

y, por tanto, es un dominio simplemente conexo. El Teorema de la aplicación conforme de Riemann garantiza la existencia y unicidad de una aplicación f con las propiedades exigidas. El problema se reduce a encontrar una aplicación con esas características.

En general, cuando se desea transformar un dominio simplemente conexo Ω en el disco $\mathbb{D}$ de manera que un punto $a \in \Omega$ vaya al origen y que la derivada en a sea positiva, basta encontrar cualquier aplicación conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y luego multiplicarla por la constante apropiada de módulo uno (es decir, aplicarle una rotación) para que la derivada en el origen sea positiva, ya que las rotaciones transforman el disco sobre sí mismo. (En esta solución, debido a la elección conveniente de la función f, ni siquiera va a ser necesario dar ese último paso.)

Comenzamos transformando nuestra banda horizontal Ω de anchura 2 en otra similar pero de anchura π, utilizando la trasnformación $g(z) = \frac{\pi}{2}\,z$. Ésta transforma Ω sobre el dominio $\Omega_1 = \{w : |\operatorname{Im} w| < \pi/2\}$.

Luego utilizamos la función exponencial $h(w) = e^w$ para transformar Ω_1 en el semiplano derecho

$$\Omega_2 = \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta > 0\}\,.$$

Para justificar esto, basta recordar que en clase hemos visto que la función inversa de h, una rama del logaritmo, transforma Ω_2 en Ω_1 mediante la fórmula $\log(re^{it}) = \log r + it$, siendo $r > 0$ y $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(Alternativamente, podemos considerar las imágenes por h de los intervalos verticales $w = c + it$, $c \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$ y ver que son semicircunferencias en el semiplano derecho centradas en el origen, para llegar a la misma conclusión.)

Finalmente, utilizamos la transformación de Möbius $T(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$ para transformar Ω_2 sobre el disco unidad $\mathbb{D}$.

Es fácil comprobar que las funciones g y T son univalentes en todo su dominio, mientras que la exponencial h lo es en el dominio Ω_1 que nos interesa. Por consiguiente, la composición $f = T \circ h \circ g$ también es inyectiva y analítica en Ω y transforma Ω sobre $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \frac{e^{\pi z/2} - 1}{e^{\pi z/2} + 1}\,.$$

Se comprueba inmediatamente que $f(0) = 0$. Asimismo,

$$f'(z) = \frac{\pi e^{\pi z/2}}{(e^{\pi z/2} + 1)^2}\,.$$

con lo cual $f'(0) = \pi/4 > 0$. Ahora ya sabemos que nuestra f es la aplicación deseada.

Obviamente, existen otros procedimientos para llegar a la misma f mediante unas composiciones aparentemente más complicadas, pero todas ellas tendrán que coincidir, debido a la unicidad en el teorema de Riemann.

Ejercicio 12 *Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, además, $f(0) = 1$. Demuestre que*

$$|f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Solución. La idea fundamental consiste en aplicar el Lema de Schwarz; la clave está en hacerlo de forma correcta. Esto se puede conseguir llevando el semiplano derecho $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ al disco unidad mediante la aplicación conforme T, utilizada varias veces en clase y dada por

$$T(w) = \frac{1-w}{1+w}\,,$$

de modo que la función $g = T \circ f$ cumple las condiciones del lema de Schwarz:

1. g es analítica en $\mathbb{D}$, al ser la composición de dos funciones analíticas;
2. $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, ya que $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ y $T(\Omega) \subset \mathbb{D}$;
3. $g(0) = T(f(0)) = T(1) = 0$.

Por lo tanto, $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir,

$$\left|\frac{1-f(z)}{1+f(z)}\right| \le |z|\,.$$

Ahora despejamos esta desigualdad con sumo cuidado, utilizando la desigualdad triangular en $\mathbb{C}$:

$$|f(z)| - 1 \le |1 - f(z)| \le |z| \cdot |1 + f(z)| \le |z|(1 + |f(z)|) \le |z| + |z| \cdot |f(z)|\,.$$

Comparando la primera y la última cantidad en esta cadena de desigualdades y agrupando los términos, obtenemos finalmente

$$(1-|z|)\,|f(z)| \le 1+|z|\,,$$

que es la desigualdad deseada. ■

Ejercicio 13 *(a) Sea* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *tal que* $f(0)=a$ *y*

$$f(z) \neq \frac{1}{\overline{a}}\,, \qquad \left|\frac{a-f(z)}{1-\overline{a}f(z)}\right| \le 1\,, \qquad \forall z \in \mathbb{D}\,.$$

Demuéstrese que

$$|f'(0)| \le 1-|a|^2\,.$$

(b) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$*,* $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ *y* f *tiene un punto fijo* p *en* $\mathbb{D}$*, Demuestre que entonces*

$$\left|\frac{p-f(0)}{1-\overline{p}f(0)}\right| \le |p|\,.$$

Solución. Consideremos la función compuesta

$$g(z) = \varphi_a(f(z)) = \frac{a-f(z)}{1-\overline{a}f(z)}\,.$$

Esta nueva función obviamente está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{D}$. Además cumple $|g(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$ (por hipótesis) y $g(0)=\varphi_a(f(0))=\varphi_a(a)=0$. Podemos aplicar el Lema de Schwarz para concluir que $|g'(0)| \le 1$. El cálculo directo nos muestra que

$$g'(0) = \varphi_a'(f(0)) \cdot f'(0) = \varphi_a'(a) \cdot f'(0) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}a)^2} f'(0) = -\frac{f'(0)}{1-|a|^2}$$

y la afirmación se sigue.

(b) Conviene definir $F=\varphi_p \circ f \circ \varphi_p$, donde φ_p es el automorfismo involución habitual: $\varphi_p(z)=\frac{p-z}{1-\overline{p}z}$. Esta nueva función es holomorfa en $\mathbb{D}$, lleva $\mathbb{D}$ en sí mismo y cumple

$$F(0) = \varphi_p(f(\varphi_p(0))) = \varphi_p(p) = 0\,,$$

ya que $f(p)=p$ por hipótesis. El Lema de Schwarz implica que $|F(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, cuando $z=p$ tenemos que

$$|\varphi_p(f(0))| = |\varphi_p(f(\varphi_p(p)))| \le |p|\,,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura
en 2008 y 2015