Variable Compleja I, Curso 2014-15

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 6 de problemas

Singularidades aisladas. Series de Laurent

1) Halle las singularidades, identifique su tipo y calcule los correspondientes residuos para las siguientes funciones:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}\,; \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^3-1}\,; \qquad \textbf{c)}\ \frac{\cos z-1}{z^2}\,; \qquad \textbf{d)}\ \frac{1}{z^2 \operatorname{sen} z}\,; \qquad \textbf{e)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\,.$$

2) Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\textbf{a)}\quad \cos\frac{1}{z}\,, \quad a=0\,, \qquad \textbf{b)}\quad \frac{1}{z^2-3z+2}\,, \quad a=2\,; \qquad \textbf{c)}\quad z^2 e^{1/(1-z)}\,, \quad a=1\,.$$

3) Sean f y g dos funciones holomorfas en $D(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|<r\}$. Demuestre que si f tiene un cero de orden n en a y g tiene un cero de orden m en a, con $n<m$, entonces f/g tiene un polo de orden $m-n$ en a. Calcule el residuo.

Teorema de los residuos. Cálculo de algunas integrales impropias

4) Calcule las siguientes integrales: (i) $\displaystyle\int_{|z|=t}\frac{dz}{z^2-z+1}$, $t\neq 1$; (ii) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1+z}{1-\cos z}dz$.

5) Evalúe la integral $\int_\gamma z^n e^{1/z}dz$, donde $n\in\mathbb{N}$ y γ es una circunferencia (orientada positivamente) que rodea al origen.

6) Demuestre razonadamente que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$, donde $a>0$.

7) Demuestre las siguientes igualdades utilizando el teorema de los residuos (con una elección adecuada del camino):

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=\pi\,.$$

8) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{(x-1)^2+1}\,, \qquad \text{(b)}\ \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}\,, \qquad \text{(c)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{4x^2-1}\,dx\,.$$

9)* Compruebe las siguientes igualdades para $|p|<1$, $q>0$:

$$\text{(a)}\ \int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi p}{2}\right)^{-1}\,, \qquad \text{(b)}\ \int_0^{\infty}\frac{x^p}{(x+q)^2}\,dx=\frac{\pi p\,q^{p-1}}{\operatorname{sen}\pi p}\,.$$

Principio del argumento. Teorema de Rouché

10) Halle el número de ceros del polinomio

$$p(z) = z^3 - 7z^2 + 2z - 3$$

en la corona $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 10\}$.

11) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

12) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

13) Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:
a) en el semiplano derecho $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$;
b) en el semiplano superior $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

14)* Pruebe que la ecuación $z = \lambda - e^{-z}$, con λ real y $\lambda > 1$, tiene en $\{z : \text{Re } z > 0\}$ una única raiz y, además, ésta es real.

Teorema de Morera

15) La función g viene dada por $g(z) = \int_0^\pi \cos(z + t)dt$, para $z \in \mathbb{C}$. Demuéstrese que g es entera.

Observación. El teorema de Morera nos permite demostrar que funciones definidas mediante ciertas integrales son también holomorfas, lo cual nos proporciona más ejemplos aparte de las fórmula explícitas y series de potencias.

16) * Sea f una función continua en el plano complejo $\mathbb{C}$ y holomorfa en el plano menos un segmento $[a, b]$ del eje real. Utilizando el teorema de Morera, demuestre que f es entera.