Variable Compleja I **3^{o} de Matemáticas / 4^{o} de Doble Titulación**

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE JUNIO, 2014-15

APELLIDOS, NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

IMPORTANTE: *Se pide justificar todas las respuestas de manera clara y detallada, nombrando y enunciando los teoremas y las fórmulas que se usen y mostrando el trabajo desarrollado.*

Cada problema puntúa $2,5$.

1. (a) Calcule el valor de la integral

$$\int_{|z|=1} z^{99} \cos(1/z)\, dz$$

con orientación anti-horaria (positiva).

(b) Determine todas las funciones enteras f que cumplan $|f(z)| \geq 1$ para todo z complejo.

(c) Sea f una funcion entera tal que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Es cierto que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $f(z + 2\pi) = f(z)$? Razone la respuesta, dando una prueba o un contraejemplo.

2. Calcule la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \,,$$

siguiendo los pasos indicados a continuación.

(a) Indique la función analítica apropiada que se debe integrar:

$$f(z) =$$

(b) Dibuje y describa el recinto (contorno, camino,...) adecuado de integración.

(c) Justifique las acotaciones necesarias e indique los límites pertinentes para las integrales sobre los distintos trozos del recinto.

(d) Finalmente, calcule el valor de la integral I.

3. Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva del dominio

$$\Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 0\,, |z| > 1\}$$

sobre el primer cuadrante

$$\Omega_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\,, \operatorname{Im} w > 0\}\,,$$

justificando los dibujos y las propiedades de las aplicaciones utilizadas.

4. Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ tal que $f(0) = 0$ y $\operatorname{Re} f(z) < 1$. Demuestre que:

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|} \qquad \text{y} \qquad |f'(0)| \leq 2\,.$$

Razone la respuesta.