Topología — Convocatoria extraordinaria

Topología, UAM 2018-19 | 3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación

Apellidos, Nombre RESPUESTAS Inic. apellido

D.N.I. Grupo Firma

Cada apartado de cada ejercicio vale 1 punto y hay más de 10 apartados en total. La calificación final será el mínimo entre 10 y la puntuación obtenida en este examen. Todas las respuestas deben justificarse, salvo que se indique lo contrario.

1. (2 puntos) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si X es un espacio topológico y A, D $\subset X$, entonces $\partial(A \cup D) \subset \partial A \cup \partial D$.

CIERTO: $\partial(A \cup D) = \overline{A \cup D} \cap \overline{(A \cup D)^c}$

$\overline{A \cup D} = \overline{A} \cup \overline{D}$; $\overline{(A \cup D)^c} = \overline{A^c \cap D^c} \subset \overline{A^c} \cap \overline{D^c}$

Si $x \in \partial(A \cup D)$ entonces $(x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c} \cap \overline{D^c})$ ó $(x \in \overline{D}$ y $x \in \overline{A^c} \cap \overline{D^c})$ por tanto $x \in \partial A$ ó $x \in \partial D$.

(b) Si X es un espacio métrico y $G \neq \emptyset$ es un subconjunto abierto de X, entonces $G = \mathrm{Int}(\overline{G})$.

FALSO: en $(\mathbb{R}, d_u)$ es decir en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

si $G = (0,1) \cup (1,2)$, $\overline{G} = [0,2]$ y $\mathrm{Int}(\overline{G}) = (0,2)$

$\therefore G \subsetneq \mathrm{Int}(\overline{G})$.

2. (3 puntos)
(a) En un espacio métrico (X, d), sean

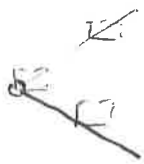
$$B(x;r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \qquad \overline{B}(x;r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Demuestra que siempre se cumple la inclusión $\overline{B(x;r)} \subset \overline{B}(x;r)$ y que puede ser estricta, dando un ejemplo pertinente.

Obviamente $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$, además $\overline{B}(x,r)$ es cerrado (pues $(\overline{B}(x,r))^c$ es abierto) por tanto $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$.

La inclusión puede ser estricta: Si X tiene al menos dos puntos y d es la métrica discreta entonces $\{x\} = B(x,1) \subsetneq \overline{B}(x,1) = X$.

(b) Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto de Sorgenfrey. Para el subconjunto $A = \{(x,y) : x > 0, -x \leq y < x\}$, determina su interior y su frontera. No es necesario razonar la respuesta.



$\mathring{A} = A$

$\partial A = \{x \geq 0,\ x = y\}$

(c) Para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$: $A = (0, +\infty)$, $B = \mathbb{Z}$, calcula su cierre y su interior en la topología conumerable, sin justificar el trabajo.

$\overline{A} = \mathbb{R}$

$\overline{B} = \mathbb{Z}$

$\mathring{A} = \phi$

$\mathring{B} = \phi$

3. (2 puntos) Razona las respuestas a las siguientes preguntas.

(a) Demuestra que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : A$ es abierto y denso en la topología usual de $\mathbb{R}\}$ es una topología de $\mathbb{R}$.

1. $\phi \in \mathcal{T}$ 2. $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ $(\mathbb{R} \in \mathcal{T}_u, \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R})$

3. $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \cup A_\alpha \in \mathcal{T}_u$; $\mathbb{R} = \overline{A}_\alpha \subset \overline{\cup A_\alpha}$ $\therefore$ $\overline{\cup A_\alpha} = \mathbb{R}$

4. $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_u$; $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

(b) ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ del apartado anterior un espacio de Hausdorff?

No. No existen abiertos no vacíos que sean disjuntos, ya que su intersección es densa.

4. (2 puntos)

(a) Demuestra que el intervalo $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ es un conjunto cerrado pero no compacto en la topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$.

La topologíá de Sorgenfrey es más fina que la usual, por tanto todo cerrado usual es cerrado de Sorgenfrey.

El recubrimiento abierto $\{[0, 1-\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{[1, 2)\}$ no tiene subrecubrimiento finito (en toda parte finita del recubrimiento habrá un n_0 máximo, por tanto el intervalo $[1-\frac{1}{n_0}, 1)$ quedará sin recubrir).

(b) Si K es un compacto en un espacio topológico X y existen U_1 y U_2 abiertos de X tales que $K \subset U_1 \cup U_2$, $K \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1,2$ y $K \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (es decir, K no es conexo), entonces $K \cap U_i$ es compacto, $i = 1,2$.

Si $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ recubre $K \cap U_1$ con los A_α abiertos, entonces $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{U_2\}$ recubre K, por tanto existe $I_0 \subset I$, I_0 finito, tal que $\{A_\alpha : \alpha \in I_0\} \cup \{U_2\}$ recubre K y forzosamente $\{A_\alpha : \alpha \in I_0\}$ recubre $K \cap U_1$

5. (2 puntos)
(a) Sea $f : X \to Y$ una función continua. Demuestra que si X es conexo entonces $f(X)$ es conexo.

Sean V_1, V_2 abiertos de Y tales que $f(X) \subset V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 \cap f(X) = \phi$. Entonces $f^{-1}(V_1)$, $f^{-1}(V_2)$ son abierto de X; $X \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ y $X \cap f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \phi$; por ser X conexo, esto implica $f^{-1}(V_1) = \phi$ ó $f^{-1}(V_2) = \phi$ es decir $V_1 \cap f(X) = \phi$ ó $V_2 \cap f(X) = \phi$

$\therefore$ $f(X)$ es conexo.

(b) Determina razonadamente si entre los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ hay dos que sean homeomorfos:

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}; \qquad B = \{(x,y) : x^2 - y^2 \le 1\}; \qquad C = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

A compacto (cerrado y acotado); B no compacto (no acotado); C compacto (cerrado y acotado) por tanto $A \not\cong B$; $B \not\cong C$ ($\not\cong$ significa no homeomorfo).

Si existiera $F: A \to C$ homeomorfismo entonces $F|_{A \setminus \{(-1,0),(1,0)\}} : A \setminus \{(-1,0),(1,0)\} \to C \setminus \{f(-1,0), f(1,0)\}$ sería un homeomorfismo. Pero $A \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ no es conexo ($\{(x,y): y>0\}$ y $\{(x,y): y<0\}$ son abiertos disjuntos que separan $A \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ en dos componentes conexas) y $C \setminus \{f((-1,0)), f((1,0))\}$ es conexo por caminos, por tanto conexo, por tanto no existe F