Topología — Examen final **3º de Matemáticas / 4º de Doble Titulación**

UAM 2018-19 **Convocatoria ordinaria, 22 de enero de 2019**

1. (2 puntos) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si X es un espacio topológico y $F \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado de X, entonces $F = \overline{\mathrm{Int}\,(F)}$.

(b) Si X es un espacio topológico y $\mathsf{A} \subset X$, entonces $\partial\overline{\mathsf{A}} = \partial\mathsf{A}$.

<u>Solución</u>. (a) FALSO.
Ejemplo 1: En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, sirve cualquier conjunto finito, por ejemplo, $F = \{0\}$, ya que es cerrado y su interior es vacío, luego también $\overline{\mathrm{Int}\,(F)} = \emptyset$.
Ejemplo 2: En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, el conjunto $F = [0, 1] \times \{0\}$ es cerrado pero su interior es vacío.

(b) FALSO.
Ejemplo 1: En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, sea $A = (0, 1) \cup (1, 2)$. Entonces $\overline{A} = [0, 2]$ y $\partial\overline{A} = \{0, 2\}$ mientras que $\partial A = \{0, 1, 2\}$.
Ejemplo 2: En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, sea $A = \mathbb{Q}$. Entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$ y $\partial\overline{A} = \emptyset$ mientras que $\partial A = \mathbb{R}$.

2. (3 puntos)
(a) Sea X un espacio métrico y $\mathsf{A} \subset X$. Para $x \in X$, definimos $d(x, \mathsf{A}) = \inf\{d(x, a) : a \in \mathsf{A}\}$, como es habitual. Demuestra que el conjunto

$$G = \{x \in X : d(x, \mathsf{A}) > 0\}$$

es abierto.

(b) Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto de Sorgenfrey. Para el subconjunto $\mathsf{A} = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$, determina los conjuntos $\overline{\mathsf{A}}$ y $\mathring{\mathsf{A}}$. No es necesario razonar la respuesta.

(c) Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$, dotado de la topología de orden lexicográfico. Consideremos su subconjunto $\mathsf{A} = [0, 1/2] \times [0, 1)$. Se pide determinar el cierre y el interior de A, sin justificar la respuesta.

<u>Solución</u>.
(a) Solución 1. Hemos visto en clase que $\{x \in X : d(x, \mathsf{A}) = 0\} = \overline{A}$ y, por tanto, es un conjunto cerrado. Puesto que $d(x, \mathsf{A}) \geq 0$ para cualquier x, se sigue que $G = (\overline{A})^c$; por tanto, G es abierto.

Solución 2. Que G es abierto puede verse directamente por definición. Basta comprobar que todo punto de G es interior. Sea $x \in G$ arbitrario; entonces $d(x, \mathsf{A}) = \delta > 0$. Se sigue entonces que $d(x, a) \geq \delta$ para todo $a \in \mathsf{A}$. Es fácil deducir que la bola abierta $B(x, \delta/2) \subset G$: si $y \in B(x, \delta)$ entonces $d(x, y) < \delta/2$ y la desigualdad triangular implica que

$$d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > \delta - \delta/2 = \delta/2\,,$$

luego $d(y, A) = \inf\{d(y, a) : a \in \mathsf{A}\} \geq \delta/2 > 0$, así que $y \in G$.

(b) Respuesta: $\overline{\mathsf{A}} = \mathring{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$.
En efecto, es fácil ver que A es abierto ya que cada punto de A es interior en la topología de Sorgenfrey: para cada $(x, y) \in \mathsf{A}$ tenemos x, $y \geq 0$, luego también el entorno abierto básico $[x, x + 1) \times [y, y + 1)$ está contenido en A.

El conjunto A también es cerrado porque es cerrado en la topología usual (lo cual es fácil ver por los métodos vistos tanto en Cálculo II como en esta asignatura) y ésta es menos fina que la de Sorgenfrey. Una justificación detallada sería como sigue: A^c es abierto en la topología usual, luego también en la de Sorgenfrey, así que A es cerrado en la topología de Sorgenfrey.

(c) Respuesta: $\overline{\mathsf{A}} = [0,1/2] \times [0,1]$. $\overset{\circ}{\mathsf{A}} = \{(0,0)\} \cup ([0,1/2] \times (0,1))$.
En cuanto al cierre, es fácil ver que, por ejemplo, cualquier punto de la forma $(x,1) \in \overline{\mathsf{A}}$: cualquier intervalo abierto en la topología del orden lexicográfico que contiene a este punto tiene que contener algún punto $(x, 1-\varepsilon)$ para un $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño, luego cualquier intervalo que contiene a $(x,1)$ tiene intersección no vacía con A.
No es difícil comprobar que cada punto del conjunto $\{(0,0)\} \cup ([0,1/2] \times (0,1))$ es interior para A. Por ejemplo, $(1/2,1/2)$ lo es porque tiene un entorno abierto completamente contenido en A, por ejemplo, el intervalo abierto desde el punto $(1/2,0)$ hasta $(1/2,1)$, que no es otra cosa que el conjunto $\{1/2\} \times (0,1)$. En cuanto al punto $(0,0)$, conviene recordar que es el elemento mínimo del cuadrado en el orden lexicográfico, luego el intervalo semiabierto desde $(0,0)$ hasta $(0,1)$ es un entorno básico abierto en la topología lexicográfica del cuadrado; por tanto, $(0,0)$ también es un punto interior de A.

3. (2 puntos)

(a) Sea $f : X \to Y$ una biyección abierta entre dos espacios topológicos. Si X es un espacio de Hausdorff, demuestra que Y también lo es.

(b) Demuestra que la intersección de una familia (no vacía) de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

Solución. (a) Sean p, $q \in Y$ arbitrarios con $p \neq q$. Veamos que estos dos puntos se pueden separar mediante conjuntos abiertos en Y. Puesto que $f : X \to Y$ es biyectiva, existen x, $y \in X$ tales que $p = f(x)$, $q = f(y)$ y, además, $x \neq y$. El espacio X es Hausdorff, así que existen U, V abiertos en X y disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$. Puesto que f es una aplicación abierta, los conjuntos $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos; además son disjuntos, por ser f inyectiva, y $p \in f(U)$, $q \in f(V)$, así que son los conjuntos que buscamos. Esto completa la prueba. Advertencia: No se puede empezar separando dos puntos distintos de X, hay que empezar con dos puntos del espacio Y.

(b) Sea $\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ nuestra familia de compactos en X (Hausdorff) y $K = \cap_{\alpha \in I} K_\alpha$. Cada compacto en un espacio de Hausdorff es cerrado (por un teorema visto en clase) y la intersección de conjuntos cerrados es otro cerrado, luego K es cerrado en X. Además, $K \subset K_\beta$ para cualquier $\beta \in I$, que es un subconjunto compacto de X. Obsérvese también que K es cerrado en K_β al ser $K = K \cap K_\beta$ y K un cerrado de X, luego K es un subconjunto cerrado de un compacto (K_β) y, por tanto, es compacto (por otra propiedad vista en clase).

4. (2 puntos)
(a) Sea X un conjunto de, al menos, dos elementos y $a \in X$. Ya sabemos que la familia

$$\mathcal{T} = \{\mathsf{A} \subset X : a \in \mathsf{A}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología de X (daremos por hecho que $\mathcal{T}$ es una topología; no se pide demostrarlo). Si $b \in X$, $b \neq a$, demuestra que el subconjunto $\{a,b\}$ es conexo.

(b) Determina razonadamente si entre los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathsf{usual}})$ hay dos que sean homeomorfos:

$$([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])\,; \qquad \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}\,; \qquad \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}\,.$$

Solución. (a) La topología relativa del conjunto $S = \{a, b\}$ se obtiene haciendo intersecciones de dicho conjunto con los abiertos de X (los conjuntos que contienen al punto a). Por tanto, la topología relativa de S es

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} .$$

Para ver que S es conexo, basta ver que no contiene ningún subconjunto distinto de $\emptyset$ y de S que sea abierto y cerrado a la vez: el único candidato es el conjunto $\{a\}$, que es abierto pero no es cerrado porque su complementario es $\{b\}$ y éste no pertenece a la topología de S.

(b) Usaremos la siguiente notación:

$$\mathsf{A} = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) ; \qquad \mathsf{B} = \mathbb{S}^1 ; \qquad \mathsf{C} = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} .$$

Observemos que A es la "letra T invertida" y C es la corona comprendida entre las circunferencias centradas en el origen y de radios 1 y 2, respectivamente.
Puesto que A y B son cerrados y acotados en el plano, son compactos, mientras que C no lo es ya que no es cerrado. Recordemos el siguiente resultado visto en clase: las aplicaciones continuas preservan la compacidad. Por tanto, C no es homeomorfo a ninguno de los conjuntos A y B.
Sólo queda decidir si A y B son homeomorfos. Veamos que no lo son. Si lo fueran, existiría un homeomorfismo $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. Entonces, por un ejercicio visto en clase, la restricción $f : \mathsf{A} \setminus \{(0, 0)\} \to \mathsf{B} \setminus \{f(0, 0)\}$ también sería un homeomorfismo. Pero $\mathsf{A} \setminus \{(0, 0)\}$ no es conexo ya que se puede separar por dos abiertos disjuntos, por ejemplo, por $U = \mathsf{A} \cap \{(x, y) : x + y > 0\}$ y $V = \mathsf{A} \cap \{(x, y) : x + y < 0\}$. Sin embargo, $\mathsf{B} \setminus \{f(0, 0)\}$ es conexo porque es conexo por caminos (dos puntos se conectan por un arco de circunferencia). Por tanto, A y B no son homeomorfos.
En resumen, no hay dos conjuntos homeomorfos entre los tres dados.

5. (2 puntos)

(a) De entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{A} = [0, 1] , \qquad \mathsf{B} = \{1, \pi, \sqrt{13}, -8\} , \qquad \mathsf{C} = \mathbb{N} \cup \{-3, -5\} , \qquad \mathsf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\} ,$$

indica (sin justificar la respuesta) cuáles son densos en la topología cofinita.

(b) Demuestra que un espacio dotado de la topología discreta es separable si y sólo si es numerable.

Solución. (a) Tal y como se ha visto en clase o en las tutorías de grupo, un conjunto es denso en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita si y sólo si es infinito. Por tanto, A, C y D son densos en el espacio dado mientras B no lo es.

(b) En la topología discreta, el conjunto $\{x\}$ es abierto para cada punto $x \in X$. Un conjunto denso tiene que cortar a todo abierto y, por tanto, tiene que contener a cada $x \in X$. Por consiguiente, todo conjunto denso en X tiene que ser el total. Para que X sea separable, el conjunto denso ha de sea numerable y, por tanto, el propio espacio X tiene que ser numerable.
Recíprocamente, si X es numerable y está dotado de la topología discreta, entonces el propio X es un conjunto numerable y denso en X y, por tanto, es separable.