Topología — Examen final **22 de enero de 2019**

Topología, UAM 2018-19 3º **de Matemáticas** / 4º **de Doble Titulación**

Apellidos, Nombre ______________________ Inic. apellido ______

D.N.I. __________ Grupo __________ Firma ______________

Cada apartado de cada ejercicio vale 1 *punto y hay más de 10 apartados en total. La calificación final será el mínimo entre 10 y la puntuación obtenida en este examen. Todas las respuestas deben justificarse, salvo que se indique lo contrario.*

1. (2 puntos) Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien un contraejemplo sencillo) si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
(a) Si X es un espacio topológico y $F \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado de X, entonces $F = \overline{\mathrm{Int}\,(F)}$.

(b) Si X es un espacio topológico y $\mathsf{A} \subset X$, entonces $\partial\overline{\mathsf{A}} = \partial\mathsf{A}$.

2. (3 puntos)
(a) Sea X un espacio métrico y $\mathsf{A} \subset X$. Para $x \in X$, definimos $d(x, \mathsf{A}) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in \mathsf{A}\}$, como es habitual. Demuestra que el conjunto

$$G = \{x \in X : d(x, \mathsf{A}) > 0\}$$

es abierto.

(b) Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de la topología producto de Sorgenfrey. Para el subconjunto $\mathsf{A} = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$, determina los conjuntos $\overline{\mathsf{A}}$ y $\mathring{\mathsf{A}}$. No es necesario razonar la respuesta.

(c) Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$, dotado de la topología de orden lexicográfico. Consideremos su subconjunto $\mathsf{A} = [0, 1/2] \times [0, 1)$. Se pide determinar el cierre y el interior de A, sin justificar la respuesta.

3. (2 puntos)

(a) Sea $f : X \to Y$ una biyección abierta entre dos espacios topológicos. Si X es un espacio de Hausdorff, demuestra que Y también lo es.

(b) Demuestra que la intersección de una familia (no vacía) de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

4. (2 puntos)
(a) Sea X un conjunto de, al menos, dos elementos y $a \in X$. Ya sabemos que la familia

$$\mathcal{T} = \{\mathsf{A} \subset X : \ a \in \mathsf{A}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología de X (daremos por hecho que $\mathcal{T}$ es una topología; no se pide demostrarlo). Si $b \in X$, $b \neq a$, demuestra que el subconjunto $\{a, b\}$ es conexo.

(b) Determina razonadamente si entre los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ hay dos que sean homeomorfos:

$$([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])\,; \qquad \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}\,; \qquad \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}\,.$$

5. (2 puntos)

(a) De entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{A} = [0,1]\,, \qquad \mathsf{B} = \{1, \pi, \sqrt{13}, -8\}\,, \qquad \mathsf{C} = \mathbb{N} \cup \{-3, -5\}\,, \qquad \mathsf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}\,,$$

indica (sin justificar la respuesta) cuáles son densos en la topología cofinita.

(b) Demuestra que un espacio dotado de la topología discreta es separable si y sólo si es numerable.