

4. DEFINICIÓN DE TOPOLOGÍA. EJEMPLOS DE TOPOLOGÍAS

22. Sea X un conjunto y A, B dos subconjuntos propios y no vacíos de X tales que $A \neq B$. Si la colección $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, X\}$ es una topología de X , ¿qué condición deben cumplir A y B ?

23. Sean X un conjunto y $a \in X$. Se considera la familia \mathcal{T}_a de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Decide razonadamente si \mathcal{T}_a es una topología en X .

24. Sean X un conjunto infinito y \mathcal{T} una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que \mathcal{T} es la topología discreta de X .

25. En el plano \mathbb{R}^2 se considera la familia \mathcal{T} de todos los subconjuntos U tales que para cada (a, b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \subset U.$$

Estudia si \mathcal{T} es una topología en \mathbb{R}^2 .

5. BASES. SUBBASES

26. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de \mathbb{R} : $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

i) Demuestra que cada una de las familias \mathcal{B}_{\leftarrow} y $\mathcal{B}_{\rightarrow}$ es una base de una topología de \mathbb{R} .

ii) Compara estas topologías.

iii) Demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

27. Sea \mathcal{T}_j , $j \in J$ una familia de topologías sobre X . Demuestra que existe una topología que contiene a todas las \mathcal{T}_j , para $j \in J$, y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

28. Para cada punto (x, y) de \mathbb{R}^2 y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $Q_r(x, y)$:

«cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y) ».

Haz un dibujo que ayude a demostrar que $\mathcal{B} = \{Q_r(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ es base para una topología en \mathbb{R}^2 .

29. Sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 bases de sendas topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 de un mismo conjunto X , demuéstrese que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

es base de una topología más fina que \mathcal{T}_1 y que \mathcal{T}_2 .

30. Encuentra una subbase para la topología discreta en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que todos sus miembros tengan más de un elemento.

6. PRODUCTO DE DOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS. SUBESPACIOS

31. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[1]}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[1]})$ (plano de Sorgenfrey), describe la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

32. Sean X e Y espacios topológicos, $A \subset X \times Y$ y $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$, $A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}$.

i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$, entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

33. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea \mathcal{T} la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías \mathcal{T}_1 de X y \mathcal{T}_2 de Y . Prueba que, si \mathcal{B} es una base de \mathcal{T} (no necesariamente la «base producto»), entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}_1 y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}_2 . ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

34. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en \mathbb{R}^2 generada por la base \mathcal{B} del ejercicio 28. ¿Existen en \mathbb{R} sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?

Indicación: De existir, ambas topologías deberían ser menos finas que la usual.

35. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $E \subset \mathcal{T}$. Demuestra que E es abierto si y sólo si E es un entorno abierto de cada punto $x \in E$, si y sólo si E es un entorno de cada punto $x \in E$.

36. Comprueba que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una topología de $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, donde $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

- i) Halla todos los conjuntos cerrados en la topología \mathcal{T} .
- ii) Describe todos los entornos abiertos del punto $m \in \mathbb{N}$ en la topología \mathcal{T} .
- iii) Determina la clausura de los siguientes conjuntos A y D : $A = \{9, 13, 48, 96\}$, $D = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

37. Se considera el siguiente subconjunto de \mathbb{R} : $A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Halla $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} y A' en las siguientes topologías de \mathbb{R} :

- i) La cofinita.
- ii) La topología \mathcal{T}_{\downarrow} de Sorgenfrey (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).
- iii) La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- iv) \mathcal{T}_{\leftarrow} (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

38. Halla dos subconjuntos A, D abiertos de la topología usual de \mathbb{R} para los que los cuatro subconjuntos $A \cap \bar{D}$, $\bar{A} \cap D$, $\bar{A} \cap \bar{D}$ y $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{D}$ sean distintos.

39. Sea X un espacio topológico y sean $A, D \subset X$. Demuestra que:

- i) $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- ii) $\partial A = \emptyset$ si y sólo si A es simultáneamente abierto y cerrado.
- iii) Si A es abierto, entonces $A \cap \bar{D} \subset \overline{A \cap D}$. ¿Se satisface esta inclusión si A no es abierto?
- iv) Si $A \cup D = X$, entonces $\bar{A} \cup \overset{\circ}{D} = \text{Int}(A \cup D) = X$.
- v) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{D} \subset \text{Int}(A \cup D)$. La inclusión anterior puede ser estricta.
- vi) Si $\partial A = D$ y $\partial D = A$, entonces $A = D$.
- vii) $\partial(A \cup D) \subset \partial(A) \cup \partial(D)$ y la inclusión es estricta en general (busca un ejemplo sencillo).
- viii) Si $\bar{A} \cap \bar{D} = \emptyset$, entonces $\partial(A \cup D) = \partial(A) \cup \partial(D)$.

40. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- i) Para cada $A \subset X$, $\text{Int}(\partial A) = \emptyset$.
- ii) Si $A \neq \emptyset$ es cerrado y $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, existe D tal que $A = \partial D$.
- iii) Para cada $A \subset X$, $\bar{A} = \overline{\text{Int} A}$.
- iv) Si $A \cap \partial A = \emptyset$ entonces A es abierto.
- v) Para cada $A \subset X$, el conjunto A' es cerrado.
- vi) Si $x \notin A'$, entonces $x \notin (\bar{A})'$.

41. Sea X un espacio topológico. Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X .

i) Demuestra que

$$\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

- ii) Demuestra que si I es finito, entonces $\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.
- iii) Halla un contraejemplo que muestre que, en general, no es cierto que $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$.
- iv) Busca un fallo en la siguiente demostración —falsa— de la inclusión anterior:
Si $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ entonces, para todo entorno U de x , $U \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \bar{A}_{i_0}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$.