Cincuenta Aniversario 1968 2018
UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura Topología Grupo
Apellidos Nombre
Ejercicio del día 23 de enero de 2018

La puntuación máxima del examen es de 12 puntos. La calificación del examen será el mínimo entre 10 y el número de puntos obtenido.

1.

(a) (1 punto) Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Demuestra que si $\overline{A} \cup B = X$ entonces $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$.

(1.) $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq X$ es obvio. Para ver que $X \subseteq \overline{A} \cup \overset{\circ}{B}$, basta ver que si $x \in X$ y $x \notin \overset{\circ}{B}$ entonces $x \in \overline{A}$.

$x \notin \overset{\circ}{B} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $U \cap B^c \neq \emptyset$. Pero $X = \overline{A} \cup B \Rightarrow$ si $y \in U \cap B^c$ entonces $y \notin B \Rightarrow y \in \overline{A}$, luego $y \in U \cap \overline{A}$. Por tanto $x \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(2) $\overline{A} \cup B = X \Rightarrow \overline{A}^c \subseteq B$; si $x \in \overline{A}^c \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in B$. $\overline{A}^c$ es abierto $\Rightarrow \overset{\circ}{\left(\overline{A}^c\right)} = \overline{A}^c$; Por tanto, $\overline{A}^c = \overset{\circ}{(\overline{A}^c)} \subseteq \overset{\circ}{B} \Rightarrow X = \overline{A} \cup \overline{A}^c \subseteq \overline{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow X = \overline{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

(b) (1 punto) Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Para todo $x \in X$, se define $d(x, A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$. Demuestra que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B(x;\varepsilon) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \cap B(x; \tfrac{1}{n}) \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \text{ t.q. } d(x, x_n) < \tfrac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad d(x, A) < \tfrac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow d(x, A) = 0.
\end{aligned}
$$

Observación: $x \in \overline{A} \not\Rightarrow x \in A$; p.ej., en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$: $A = (0,1)$, $x = 0$. $d(x, A) = 0$ pero $x \notin A$.

(c) (1 punto) Demuestra que la intersección de dos subconjuntos densos y abiertos en un espacio topológico también es un subconjunto denso.

Sean A y B dos abiertos t.q. $\overline{A} = \overline{B} = X$. Veamos que $\overline{A \cap B} = X$; es decir, que $\forall x \in X$ $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.

Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Puesto que $\overline{A} = X$, sabemos que $U \cap A \neq \emptyset$; sea $y \in U \cap A$. Ambos U y A son abiertos en X, luego también lo es $U \cap A$. Por tanto, $U \cap A \in \mathcal{V}(y)$. Dado que $\overline{B} = X$, se sigue que $(U \cap A) \cap B \neq \emptyset$ y, por tanto, $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.

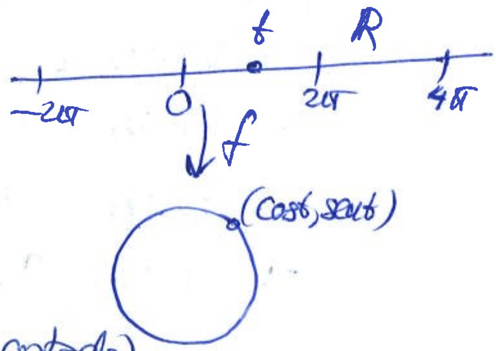
2. Decide razonadamente (bien dando una demostración, bien dando un contraejemplo sencillo) si es cierta o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) (1 punto) Si $\overline{A} \cup B = X$ entonces $A \cup \overline{B} = X$.

FALSO. Sea $X = \mathbb{R}$, con la topología usual, $A = \mathbb{Q}$; $B = \{0\}$. Entonces $\overline{A} \cup B = \overline{\mathbb{Q}} \cup \{0\} = \mathbb{R}$ pero $A \cup \overline{B} = \mathbb{Q} \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$.

(b) (1 punto) Si $f : X \to \mathbb{S}^1$ es continua y suprayectiva entonces X es compacto.

FALSO. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es continua y supreyectiva pero $\mathbb{R}$ no es compacto.



(Ejemplo visto en clase)

(2) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^1$; $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ es continua y sobreyectiva pero $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es compacto (no está acotado).

(c) (1 punto) El espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología conumerable (un subconjunto propio es abierto si su complementario es numerable o finito) es Lindelöf.

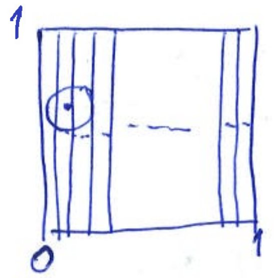
CIERTO. Basta ver que todo recubrimiento de $\mathbb{R}$ por abiertos (en $\mathcal{T}_{conum.}$) contiene un subrecubrimiento numerable. Sea $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, $G_\alpha = \mathbb{R} \setminus N_\alpha$, donde cada N_α es numerable o finito. Fijemos un $\alpha_0 \in I$. Como $G_{\alpha_0} = \mathbb{R} \setminus N_{\alpha_0}$, para recubrir $\mathbb{R}$ por G_{α_0} y una cantidad adicional numerable de conjuntos abiertos, sólo hace falta que éstos recubran N_{α_0}.

Sea $N_{\alpha_0} = \{x_1, x_2, \dots\}$; cada $x_k \in$ algún G_{α_k}. Entonces

$\{G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots\}$ es un subrecubrimiento numerable de $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$: $G_{\alpha_0} \cup G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \supseteq (\mathbb{R} \setminus N_{\alpha_0}) \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots = (\mathbb{R} \setminus N_{\alpha_0}) \cup N_{\alpha_0} = \mathbb{R}$.

3. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], y \in [0,1]\}$. Halla (no es necesario justificar la respuesta) $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, y $\mathring{\overline{A}}$,

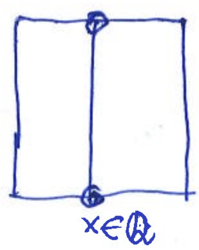
(a) (1 punto) con la topología usual de $\mathbb{R}^2$;



$\overline{A} = I^2 = [0,1]\times[0,1] \Rightarrow \mathring{\overline{A}} = (0,1)\times(0,1)$

$\mathring{A} = \emptyset \Rightarrow \overline{\mathring{A}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

(b)(1 punto) con la topología del orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$;



Cada punto (x,y), $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$, $0<y<1$, es interior de A.

$\overline{A} = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times[0,1] = A$

$\mathring{A} = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(0,1)$

$\mathring{\overline{A}} = \mathring{A} = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(0,1)$

$\overline{\mathring{A}} = A$.

4.
(a) (1 punto) Demuestra que la imagen por una aplicación abierta e inyectiva de un espacio topológico de Hausdorff es otro espacio de Hausdorff.

Sean X Hausdorff y $f: X \to f(X)$ abierta e inyectiva.

Sean $p, q \in f(X)$ $(p \neq q)$; entonces $\exists x, y \in X$ t.q. $p = f(x)$, $q = f(y)$.

f es una función, $p \neq q \Rightarrow x \neq y$ (de lo contrario, $x = y \Rightarrow p = f(x) = f(y) = q$, $\#$)

X es Hausdorff, $x \neq y \Rightarrow \exists U, V$ abiertos, $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

f abierta $\Rightarrow f(U), f(V)$ abiertos, $p \in f(U)$, $q \in f(V)$.

f inyectiva $\Rightarrow f(U) \cap f(V) = \emptyset$ (si $r \in f(U)\cap f(V) \Rightarrow r = f(u)$, $r = f(v)$, $u \in U$, $v \in V \Rightarrow u = v \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$, $\#$).

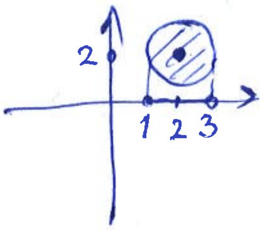
Por tanto, $\exists\, U' = f(U)$, $V' = f(V)$ t.q. $u \in U'$, $v \in V'$, $U' \cap V' = \emptyset$.

$\therefore f(X)$ es Hausdorff.

(b) (1 punto) Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como sigue:

$$f(x,y) = (x,y) \quad \text{si } x < 0, \qquad f(x,y) = (x,0) \quad \text{si } x \geq 0.$$

Decide razonadamente si f es una aplicación abierta y si es continua.

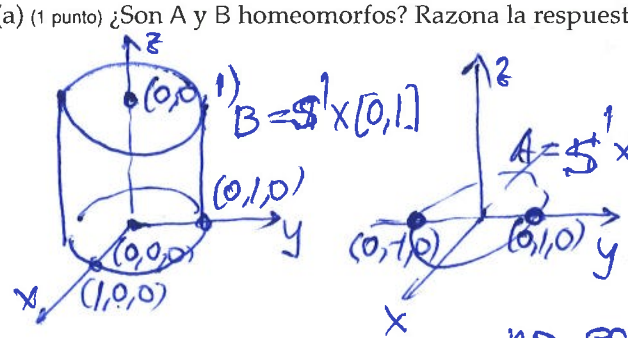


Sea $U = B((2,2);1)$; entonces $f(U) = \{(x,0) : 1 < x < 3\}$, que no es abierto en $\mathbb{R}^2$ (no contiene bolas abiertas).
$\therefore$ f no es abierta.

f tampoco es continua: los puntos $(-\frac{1}{n}, 1) \to (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ (en la topología usual) pero $f(-\frac{1}{n},1) = (-\frac{1}{n},1)$, $f(0,1) = (0,0)$ y $(-\frac{1}{n},1) \not\to (0,0)$, $n \to \infty$.

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (dotado de la topología usual): la circunferencia unidad $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y el cilindro finito $B = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

(a) (1 punto) ¿Son A y B homeomorfos? Razona la respuesta.



No lo son, por un conocido ejercicio: $S^1 \times \{0\}$ sin 2 puntos, p.ej., $S^1 \times \{0\} \setminus \{(0,1,0), (0,-1,0)\}$ no es conexo mientras que $B = S^1 \times [0,1]$ sin dos puntos sigue siendo conexo.

(b) (1 punto) ¿Son isomorfos sus grupos fundamentales? Determínalos razonadamente.

Es fácil ver que A es un retracto de deformación fuerte de B (p.ej., $f : B \times [0,1] \to B$, $f((x,y,z),t) = (1-t)(x,y,z) + t(x,y,0) = (x,y,(1-t)z)$ es continua, $f((x,y,z),0) = (x,y,z)$, $f((x,y,z),1) = (x,y,0) \in A$, $\forall (a,b,0) \in A$ $f((a,b,0),t) = (a,b,0)$)

Por tanto, $\pi_1(B) \cong \pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$. (en cualquier punto ya que ambos son conexos por caminos)