Cincuenta Aniversario 1968 2018

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura **Topología** Grupo

Apellidos Nombre

Ejercicio del día **14 de diciembre de 2017**

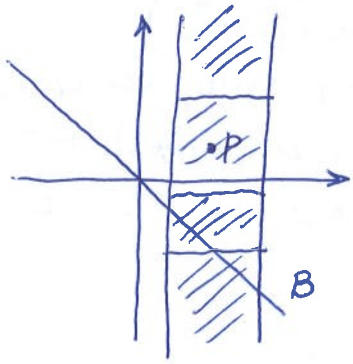
La puntuación máxima del examen es de 12 puntos. La calificación del examen será el mínimo entre 10 y el número de puntos obtenido.

1. (3 puntos) Se consideran los espacios topológicos $X=\mathbb{R}$ con la topología usual e $Y=\mathbb{R}$ con la topología cofinita. Para cada uno de los siguientes conjuntos de $X\times Y$:

$$A=\mathbb{R}\times\{3\}, \qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$$

halla, en la topología producto, su interior y su cierre (no es necesario justificar la respuesta).

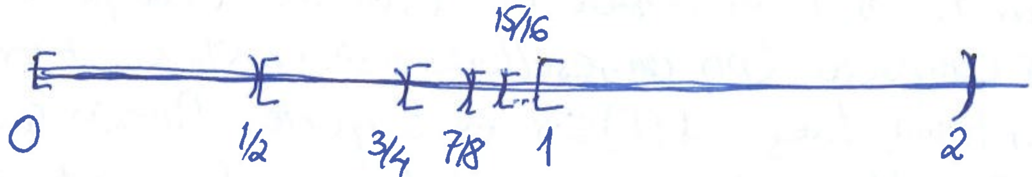
Los elementos básicos abiertos son de la forma $(a,b)\times(\mathbb{R}\setminus\{y_1,y_2,\dots,y_n\})$. Es claro que ni A ni B pueden contener a ninguno de ellos, luego $\mathring{A}=\mathring{B}=\emptyset$.
A es cerrado porque su complementario es abierto; por tanto $\bar{A}=A$.
Para cada punto $p\in\mathbb{R}^2$, es evidente del dibujo que cualquier entorno básico de p (y, por tanto, todo entorno abierto de p) corta B, luego $\bar{B}=\mathbb{R}^2$.



2. (3 puntos) Sea el espacio $X=\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ de Sorgenfrey (o del límite inferior) y en él el conjunto $A=[0,1]$.

a. Decide razonadamente si A es compacto. **b.** Decide razonadamente si A es conexo.

a. NO.



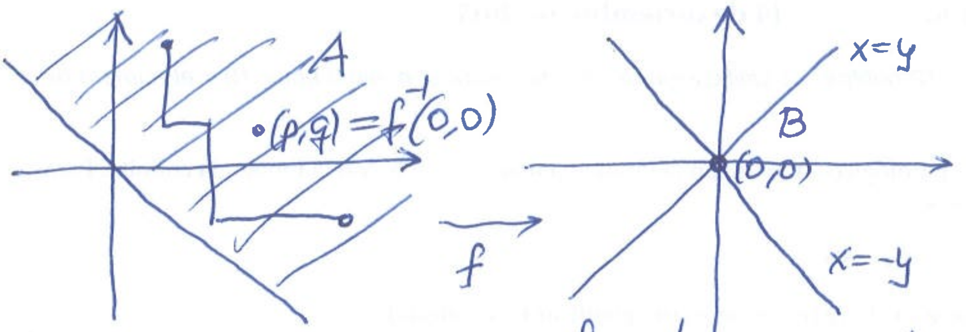
La colección de abiertos básicos $\left\{\left[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{[1,2)\}$ recubre A pero de ella no podemos extraer ningún subrecubrimiento y aún menos un subrecubrimiento finito.

b. NO. Es fácil dar un ejemplo de una separación de A por abiertos: por ejemplo, los conjuntos $U=[0,1)$ y $V=[1,2)$ son abiertos en X y, por tanto, $U\cap A=[0,1)$ y $V\cap A=\{1\}$ son dos abiertos relativos en A cuya unión es A y son disjuntos.

Alternativamente, el conjunto $\{1\}$ es $\neq\emptyset, A$ y es cerrado y abierto en A porque su complementario $[0,1)$ lo es.

3. (3 puntos) Decide razonadamente si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) son o no homeomorfos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}.$$



NO LO SON. Si existiese un homeomorfismo $f: A \to B$ y $(p,q) = f^{-1}(0,0) \in A$, serían también homeomorfos los conjuntos $A \setminus \{(p,q)\}$ y $B \setminus \{(0,0)\}$, por un ejercicio visto en clase (ya que f^{-1} también es un homeomorfismo). Pero $A \setminus \{(p,q)\}$ es conexo por caminos (visto en clase) y, por tanto, es conexo, mientras que $B \setminus \{(0,0)\}$ no es conexo (tiene 4 componentes). Esto contradice a la invariancia de los conexos por aplicaciones continuas. #

4. (3 puntos) Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ una aplicación continua.

a. Demuestra que f es cerrada. **b.** Demuestra que si f es inyectiva entonces f es abierta si y solamente si $f(X)$ es un abierto de Y.

a.) Hemos de ver que si F es cerrado en X, entonces $f(F)$ lo es en Y. Si F es cerrado en X, al ser X compacto, F también es compacto (por un resultado visto en clase). f es una aplicación continua, luego $f(F) \subseteq Y$ es compacto. Puesto que Y es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado (otro resultado visto en clase).

b.) Una implicación es trivial: puesto que X es abierto en X, si f es abierta, $f(X)$ es abierto en Y.

La otra es más interesante. Supongamos que $f(X)$ es un abierto de ~~X~~ Y y veamos que f es abierta.

Sea G un abierto de X. Entonces $G^c = X \setminus G$ es un cerrado de X. Por el aptdo. a), f es cerrada, luego $f(G^c)$ es un cerrado de Y, así que $Y \setminus (f(G^c))$ es un abierto de Y. Obsérvese en el dibujo que

$$f(G) = (Y \setminus f(G^c)) \cap f(X)$$ —al ser f inyectiva—

y que ambos $f(X)$ e $Y \setminus f(G^c)$ son abiertos de Y. Por tanto, $f(G)$ es un abierto de Y, QED.