Variable Compleja I (CURSO 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Singularidades aisladas, series de Laurent y residuos

En esta entrega de apuntes estudiaremos las funciones que son holomorfas salvo en puntos aislados (que se denominarán singularidades aisladas) y analizaremos los posibles comportamientos cerca de esos puntos (en el sentido de la existencia del límite finito o infinito, acotación, etc.). Veremos también, aunque no tan detalladamente, los desarrollos en series centradas en esos puntos y llamadas series de Laurent. Dichas series serán distintas de las series de Taylor porque en lugar de converger en un disco, serán convergentes en una corona alrededor de alguna singularidad, al contener potencias negativas.

De especial inerés será una característica numérica relacionada con cada singularidad aislada, llamada residuo. El residuo de una función en una singularidad aislada, de nuevo, tendrá relaciones con ciertas integrales sobre curvas del mismo tipo ya visto antes y que tendrá multitud de aplicaciones, tanto prácticas (en diversos cálculos) como teóricas (para deducir teoremas cualitativos). En la entrega que viene a continuación, veremos el sencillo pero importante Teorema de los residuos que ha encontrado su uso en un sinfín de aplicaciones concretas en Análisis, desde las series de Fourier hasta la teoría analítica de números.

Singularidades aisladas. Clasificación

En esta sección estableceremos un nexo entre la teoría de los ceros de funciones analíticas y los teoremas de Cauchy y sus aplicaciones vistos antes. Como preámbulo de la teoría, empezaremos con un resultado auxiliar, análogo de una regla conocida de los cursos de Cálculo.

La regla de L'Hôpital para funciones analíticas. Conocemos varias versiones de la regla de L'Hôpital (L'Hospital) para las funciones reales de una variable real. Es conveniente saber que dicha regla no es válida para las funciones complejas de una variable real, precisamente debido a los problemas que surgen con algunas funciones exponenciales como las que aparecen en la fórmula de Euler. Sin embargo, la versión básica sigue siendo cierta para las funciones holomorfas, esencialmente porque tiene que ver con la propia definición de la derivada compleja.

Proposición 1 *(Regla de L'Hôpital para funciones analíticas). Sea Ω un dominio, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tales que $f(a) = g(a) = 0$. Si existe el límite (finito) $\lim_{z\to a} f'(z)/g'(z)$, entonces tambien existe $\lim_{z\to a} f(z)/g(z)$ y*

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. $\square$ Consideramos primero el caso cuando $g'(a) \neq 0$. Por la definición de la derivada y las hipótesis sobre f y g, obtenemos

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

puesto que el último límite obviamente existe y es finito (tanto cuando $f'(a) \neq 0$ como cuando $f'(a) = 0$).

Consideremos ahora el caso cuando $g'(a) = 0$. Puesto que existe límite finito $\lim_{z\to a} f'(z)/g'(z)$, se sigue que $f'(a) = 0$, así que tanto f como g tienen en a un cero de orden mayor que uno. Si el orden del cero de g en a es 2, entonces (por un teorema de los apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas) $g(z) = (z-a)^2 G(z)$, con $G \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $G(a) \neq 0$, mientras que $f(z) = (z-a)^2 F(z)$, con $F \in \mathscr{H}(\Omega)$. (No podemos afirmar que $F(a) \neq 0$ -y tampoco lo necesitaremos- porque el orden del cero que tiene f en a podría ser superior y entonces F podría tener como factor otra potencia adicional de $z-a$). Entonces

$$\lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a} \frac{2(z-a)F(z) + (z-a)^2 F'(z)}{2(z-a)G(z) + (z-a)^2 G'(z)} = \lim_{z\to a} \frac{2F(z) + (z-a)F'(z)}{2G(z) + (z-a)G'(z)} = \frac{F(a)}{G(a)} = \lim_{z\to a} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Ahora se ve claramente cómo debería continuar el análisis si g tuviese un cero de orden mayor que 2 en $z = a$. Omitiremos los detalles. $\blacksquare$

Ejemplo 1. *Usando la Regla de L'Hôpital dos veces seguidas, calculamos dos límites análogos a los ya conocidos de los cursos de Cálculo:*

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)'}{(z^2)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{(\operatorname{sen} z)'}{z'} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = \frac{1}{2}.$$

El segundo límite conocido, obviamente, era $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$.

Singularidades aisladas: definición y tipos de singularidades. Vamos a estudiar los posibles comportamientos de una función holomorfa en un entorno agujereado de un punto.

Definición. Diremos que una función f tiene una singularidad aislada en el punto $z = a$ si f es holomorfa (analítica) en $\{z \in \Omega : z \neq a\}$, siendo Ω un conjunto abierto que contiene al punto a. Puesto que cada dominio contiene un disco abierto y cada disco abierto es un dominio, esto es equivalente a la condición de que f sea holomorfa en un disco agujereado $D^*(a;R) = D(a;R) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\}$.

Existen tres posibilidades en cuanto al comportamiento de f cerca de la singularidad aislada en $z = a$:

(1) f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;r)$, donde $0 < r \leq R$.

(2) $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ (en otras palabras, $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$);

(3) no se cumple ninguna de las condiciones (1) y (2).

Definición. En el caso (1) diremos que f tiene una singularidad evitable en $z = a$, en el caso (2), que tiene un polo en el punto a y, en el caso (3), que f tiene una singularidad esencial en a.

Existen numerosos ejemplos de cada una de las tres situaciones en la definición anterior. Los iremos dando a continuación, mientras estemos analizando cada uno de los posibles casos.

Singularidades evitables. El término "singularidad evitable" se justificará en breve.

Ejemplo 2. *(a) Debido a la cancelación, es obvio que la función*

$$f(z) = \frac{z^2-4}{z+2}$$

es igual a $z-2$ *cuando* $z \neq -2$*. Puesto que* $z-2$ *tiene límite finito cuando* $z \to -2$*,* f *está acotada en un entorno agujereado de dicho punto y, por tanto, tiene una singularidad evitable en* $z = -2$*.*

(b) Un ejemplo algo menos obvio: lo mismo sucede con la función

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$$

ya que $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$*, como se desprende del valor de uno de los límites en el Ejemplo 1.*

Teorema 1 *(Teorema de la singularidad evitable de Riemann). Sea* f *holomorfa en un disco agujereado* $D^*(a;r)$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f *está acotada en* $D^*(a;r)$*;*

(b) Existe el límite finito $L = \lim_{z\to a} f(z)$ *y, además, la extensión continua de* f *al disco* $D(a;r)$*:*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in D^*(a;r), \\ L, & \text{si } z = a \end{cases}$$

es, de hecho, holomorfa en $D(a;r)$*.*

DEMOSTRACIÓN. □ Es obvio que (b)⇒(a), así que sólo necesitamos demostrar que (a)⇒(b).

La clave de la demostración está en definir la siguiente función:

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & \text{si } z \in D^*(a;r), \\ 0, & \text{si } z = a \end{cases}.$$

Por hipótesis, f tiene una singularidad aislada en $z = a$, así que existe una constante M tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in D^*(a;r)$. Por tanto, para todo $z \in D^*(a;r)$ se cumple $|(z-a)f(z)| \le M|z-a|$, lo cual implica que $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Luego existe

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a)f(z) = 0\,.$$

Puesto que, por hipótesis, g tiene derivada en todos los puntos de $D^*(a;r)$, esto demuestra que $g \in \mathscr{H}(D(a;r))$. Por la definición de g, también sabemos que $g(a) = 0$, así que g tiene un cero de multiplicidad, al menos, dos en $z = a$. Por un teorema de los apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas, se sigue que existe una función $h \in \mathscr{H}(D(a;r))$ tal que $g(z) = (z-a)^2 h(z)$ en $D(a;r)$. (Según dicho teorema, si $z = a$ es un cero doble de g, tendremos $h(a) \neq 0$ y si no es un cero de orden superior,

h tendrá algún factor adicional $(z-a)^m$ pero eso no será relevante para nuestra prueba ya que nos basta con tener el factor cuadrático.) Puesto que se cumple

$$(z-a)^2 f(z) = g(z) = (z-a)^2 h(z), \qquad \forall z \in D^*(a;r),$$

se sigue que $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D^*(a;r)$. Dado que $h \in \mathscr{H}(D(a;r))$, se sigue que h es continua en $z = a$ y, por tanto, existe $\lim_{z\to a} h(z) = h(a) = L$. Puesto que f coincide con h en todo el disco agujereado $D^*(a;r)$, también se tiene $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} h(z) = L$. Esto demuestra que $\widetilde{f} \equiv h$ en $D(a;r)$, así que $\widetilde{f} \in \mathscr{H}(D(a;r))$. ■

Observación. Gracias al Teorema 1, una función que es holomorfa en un dominio Ω, salvo en un punto $a \in \Omega$ donde tiene una singularidad evitable, puede extenderse hasta una función holomorfa en todo Ω, definiendo sus valores en las singularidades adecuadamente. Por tanto, puede considerarse -a todos los efectos- como una función holomorfa en todo Ω. Lo mismo ocurre con una función con una cantidad finita de singularidades evitables en Ω, ya que se pueden considerar entornos agujereados de cada singularidad de manera que sean disjuntos dos a dos, con lo cual no habrá problemas para definir la extensión.

Ejercicio 1. *Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unidad, con orientación positiva. Calcúlese el valor exacto de la integral*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1-\cos z}{z^2}\, dz.$$

SOLUCIÓN. □ La función $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, ya que del Ejemplo 1 sabemos que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema de la singularidad evitable de Riemann y dando a la función el valor $1/2$ en el origen, podemos extender f hasta una función entera. Según el Teorema Integral de Cauchy, dado que $\mathbb{T}$ es una curva simple, cerrada y suave en el plano, la integral es igual a cero. ■

Polos. Analizaremos ahora el comportamiento de una función analítica cerca de un polo y estableceremos ciertas relaciones con los ceros de funciones analíticas.

Ejemplo 3. *Las funciones*

$$f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)^2}, \qquad g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

tienen polos, respectivamente, en $z = 1$ y en $z = 0$. Obsérvese que no hay cancelaciones en la fracción que representa la función f.

La función f no tiene otros polos. Sin embargo, la función g tiene una cantidad infinita numerable de polos. Se trata de los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, que son los únicos ceros de la función entera seno, como ya sabemos de otras entregas de apuntes y de las hojas de ejercicios.

Proposición 2. *Si una función f, holomorfa en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto $z=a$, tiene un polo en $z=a$, entonces puede escribirse como*

$$f(z)=\frac{F(z)}{(z-a)^m}$$

para un único número natural m, donde F es analítica en un disco $D^*(a;\rho)$, con $0<\rho\le R$ y $F(a)\neq 0$.

Además, el índice m que aparece en la fórmula es el único $m\in\mathbb{N}$ tal que $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ *existe como límite finito no nulo, porque para los valores $n<m$ se tiene que* $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=\infty$ *y para los naturales $n>m$ se cumple* $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=0$.

DEMOSTRACIÓN. □ Según la definición de un polo, sabemos que $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$. Obviamente, $f\not\equiv 0$ en $D^*(a;R)$; entonces sabemos de los apuntes anteriores que los ceros de f en $D^*(a;R)$ son aislados: forman un conjunto, como mucho, numerable y no pueden acumularse dentro de $D^*(a;R)$. Tampoco pueden acumularse en $z=a$: si hubiera una sucesión $(z_n)_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n=a$ y $f(z_n)=0$, entonces $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ no se cumpliría. Por tanto, podemos encontrar un entorno agujereado $D^*(a;r)$, con $0<r\le R$, tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in D^*(a;r)$. Podemos definir entonces la función $g=1/f$, que será holomorfa en $D^*(a;r)$ y, además, tendrá la propiedad de que

$$\lim_{z\to a} g(z)=\frac{1}{\lim_{z\to a} f(z)}=0\,.$$

Por el Teorema 1 de Riemann, g tiene una singularidad evitable en $z=a$ y su extensión holomorfa, a la que (abusando de notación) también llamaremos g, tiene un cero en $z=a$. Por la factorización vista en la entrega anterior de apuntes, $g(z)=(z-a)^m h(z)$, para cierta función $h\in\mathcal{H}(D(a;r))$ con $h(a)\neq 0$. Por la continuidad de h, ésta no se anula en algún disco $(D(a;r))$ con $0<\rho\le R$. Finalmente, en $D^*(a;\rho)$ se cumple la igualdad

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^m h(z)}=\frac{F(z)}{(z-a)^m}$$

para la función $F=1/h\in\mathcal{H}(D(a;\rho))$; obviamente, $F(a)\neq 0$.

De la fórmula anterior para f, es inmediato que para $n<m$ se tiene que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=\lim_{z\to a}\frac{F(z)}{(z-a)^{m-n}}=\infty$$

y para los $n>m$ se cumple

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)^{n-m}F(z)=0\,. \qquad \blacksquare$$

Definición. El número m al que se refiere la Proposición 2 se denomina el <u>orden</u> del polo $z=a$. Si $m=1$, hablamos de un <u>polo simple</u> en $z=a$ y si $m=2$, de un <u>polo doble</u>.

Ejemplo 4. *La función g del Ejemplo 3 tiene un polo simple en $z=0$ puesto que*

$$\lim_{z\to 0} z\,g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z=1\cdot\cos 0=1\,.$$

La función f del mismo ejemplo tiene un polo doble en $z=1$, ya que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z)=\lim_{z\to 1}(z^2-2)=-1\neq 0,\infty\,.$$

Obsérvese que $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\infty$, *mientras que* $\lim_{z\to 1}(z-1)^n f(z)=0$, *para $n>2$.*

Ejercicio 2. *Determine las singularidades aisladas de la función* $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z - 1}$ *situadas dentro de la circunferencia* $\gamma = \{z : |z-6| = 1\}$.

SOLUCIÓN. □ (a) Las únicas singularidades de f son aquellos puntos en los que $\cos z = 1$. Se trata de los puntos $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; es fácil encontrarlos aplicando las técnicas conocidas de los ejercios de temas anteriores.
En efecto, la ecuación $\cos z = 1$ significa que $e^{iz} + e^{-iz} = 2$, es decir, $e^{2iz} + 1 = 2e^{iz}$. La sustitución $w = e^{iz}$ nos da la ecuación cuadrática $w^2 + 1 = 2w$ cuya única solución es $w = 1$, es decir: $e^{iz} = 1$ y eso nos lleva a la conclusión deseada como en varios ejercicios vistos con anterioridad.
Puesto que $e^{2\pi n} \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, es evidente que $\lim_{z\to 2\pi n} f(z) = \infty$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, todas las singularidades son aisladas y todas son polos.
De todos estos puntos z_n, $n \in \mathbb{Z}$, sólo $z_1 = 2\pi$ está dentro de la circunferencia γ. En efecto, $|2\pi - 6| < 1$. Para $n \geq 2$, es inmediato que $|2\pi n - 6| = 2\pi n - 6 \geq 4\pi - 6 > 1$, mientras que para $n \leq 0$, $n = -m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $|2\pi n - 6| = |-2\pi m - 6| = 2\pi m + 6 \geq 6 > 1$. Por tanto, el único polo a tener en cuenta es $z_1 = 2\pi$.

Singularidades esenciales. Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 5. *La función* $e^{1/z}$ *tiene en* $z = 0$ *una singularidad esencial, ya que no está acotada en ningún entorno del origen ni tampoco tiende al infinito cuando* $z \to 0$. *Por ejemplo:*

- *La sucesión* $z_n = 1/n \to 0$ *y* $f(z_n) = e^n \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$.
- *La sucesión* $\zeta_n = -1/n \to 0$ *pero* $f(\zeta_n) = e^{-n} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.
- *La sucesión* $w_n = 1/(2\pi n i)$ *también tiende a* 0 *cuando* $n \to \infty$*; sin embargo,* $f(w_n) = e^{2\pi n i} = 1 \to 1$.

Resulta que este comportamiento es típico de una función analítica (holomorfa) cerca de una singularidad esencial. Lo afirma el siguiente resultado.

Teorema 2. *(Teorema de Casorati-Weierstrass). Si* f *tiene en* $z = a$ *una singularidad esencial, entonces para todo* $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *existe una sucesión* $(z_n)_n$ *tal que* $z_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ *y* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

DEMOSTRACIÓN. □ Partimos de la hipótesis que $f \in \mathscr{H}(D^*(a;R))$ para cierto $R > 0$.

Consideremos primero el caso $w = \infty$. Puesto que $z = a$ no es una singularidad evitable de f, la función no puede estar acotada en ningún entorno agujereado del punto a. En particular, existe $z_1 \in D^*(a;R)$ tal que $|f(z_1)| > 1$. Por la misma razón, existe $z_2 \in D^*(a; \frac{R}{2})$ tal que $|f(z_2)| > 2$. Continuando inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos la existencia de un punto $z_n \in D^*(a; \frac{R}{n})$ tal que $|f(z_n)| > n$. Evidentemente, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Veamos ahora el caso de un punto $w \in \mathbb{C}$. Si existe una sucesión de puntos $(z_n)_n$ tal que $z_n \neq a$, $z_n \to a$ y, de hecho, $f(z_n) = w$ para cada n, el resultado se sigue trivialmente. Si no existe tal sucesión, entonces existe un entorno agujereado $D^*(a;r)$ de a, con $0 < r \leq R$, donde f no toma el valor w. En este caso, la función $g = \frac{1}{f-w}$ es holomorfa en $D^*(a;r)$ y, por tanto, tiene una singularidad aislada en $z = a$. Además, en el mismo entorno agujereado tenemos la identidad $f = w + \frac{1}{g}$.

Si la singularidad aislada de g en a fuese evitable con $\lim_{z\to a} g(z) = 0$, tendríamos $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ y, por tanto, a sería un polo de f, contrario a nuestra hipótesis. Si la singularidad aislada de g en a fuese evitable con $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0$, entonces existiría el límite finito $\lim_{z\to a} f(z)$ y a sería una singularidad evitable de f, lo cual tampoco es posible. Sólo queda la opción de que $z = a$ sea una singularidad esencial de g. Entonces, por la primera parte de la demostración, existe una sucesión infinita de puntos $z_n \in D^*(a;R)$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$. Entonces, de nuevo por la relación entre f y g, se sigue que, para la misma sucesión se satisface $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Finalmente, conviene advertir que no toda singularidad es una singularidad aislada, como nos muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. *La función* $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}$ *tiene una singularidad aislada en cada uno de los puntos* $z_n = \frac{1}{n}$ *ya que el denominador se anula en* z_n *y el numerador no. Por tanto,* $\lim_{z_n\to z} f(z) = \infty$ *y cada* z_n *es un polo. Sin embargo,* $z = 0$ *es otra singularidad dado que la función no está definida allí, pero no es aislada: puesto que* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$*, no existe ningún* $R > 0$ *tal que* f *sea holomorfa en* $D^*(0;R)$.

Series de Laurent

El teorema que enunciamos a continuación fue demostrado en 1842 por el matemático e ingeniero militar francés Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), cuyo nombre se pronuncia aproximadamente como Lorán en castellano. El resultado ya se encontraba en 1841 en los cuadernos de Münster del "padre del análisis moderno", el gran matemático alemán Karl T.W. Weierstrass (1815-1897) pero esas notas no se llegaron a publicar hasta 1894.

Teorema 3. *Si* f *es holomorfa en la corona* $\{z : r < |z-a| < R\}$*, con* $0 \le r < R \le +\infty$*, entonces se puede desarrollar en serie doble de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

que converge absoluta y uniformemente en cada circunferencia $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$*. Los coeficientes* c_n *son únicos y vienen dados por la fórmula*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Definición. Esta serie se denomina la serie de Laurent de f en la corona $\{z : r < |z-a| < R\}$. La parte de la suma con los índices negativos:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

se denomina la parte principal de la serie de Laurent.

Observaciones. (1) La convergencia (puntual, absoluta, uniforme) de una serie doble, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$ debe entenderse como sigue: simplemente, para la convergencia (de cualquier tipo mencionado) de una serie así, ha de exigirse el mismo tipo de convergencia de ambas series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{-1} f_n(z)\,.$$

(2) Se admiten todos los tipos posibles de coronas como, por ejemplo,

$$\{z : 1 < |z-a| < 2\}\,, \qquad \{z : 0 < |z-a| < 1\}\,, \qquad \{z : 1 < |z-a| < +\infty\}\,,$$

entre otras. Veremos algunos ejemplos a continuación.

(3) No daremos ninguna demostración del Teorema 3. Sólo nos limitamos a indicar que la prueba se sigue de una versión de la Fórmula integral de Cauchy para "curvas" compuestas por dos circunferencias, una dentro de otra.

(4) Es importante notar que en la fórmula para el coeficiente c_n, la integral no depende de ρ mientras $r < \rho < R$, esto es

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \int_{C_s} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\,, \qquad r < \rho < s < R\,.$$

(5) En la práctica, en lugar de usar la fórmula integral para calcular los coeficientes c_n, usaremos los desarrollos conocidos de varias funciones elementales en serie de Taylor para obtener los desarrollos de Laurent de otras funciones relacionadas.

He aquí un ejemplo de desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa en una corona, usando sólo la fórmula conocida para la serie geométrica.

Ejercicio 3. *La función*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

tiene un polo simple en $z = 1$ y otro en $z = 2$ y es holomorfa en el resto del plano, es decir, en $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$. Halle el desarrollo de f en serie de Laurent en la corona $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

SOLUCIÓN. □ Usando fracciones simples, obtenemos primero:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\,,$$

donde la última igualdad se ha escrito porque, en la corona considerada, $|z/2| < 1$ y $|1/z| < 1$, lo cual nos permitirá desarrollos en potencias de $z/2$ y de $1/z$ basados en la serie geométrica. Obtenemos, pues, para esos valores:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \ldots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \ldots\,,$$

siendo la parte principal de la serie $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \ldots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$. ■

Un caso especial y muy importante es el caso $r = 0$, cuando f es holomorfa en una corona $\{z : 0 < |z-a| < R\}$, con $0 < R \leq +\infty$ y, por tanto, tiene en $z = a$ una singularidad aislada. Nótese que el caso de la serie obtenida en el Ejercicio 3 era distinto.

Teorema 4. *Para las coronas de tipo $\{z : 0 < |z-a| < R\}$, la forma que tiene la serie de Laurent indica el tipo de singularidad aislada, según la siguiente clasificación:*

- *Cuando $z = a$ es una singularidad evitable, la parte principal es nula: $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$. En otras palabras, la serie de Laurent coincide con la serie de Taylor de la función extendida (la que coincide con f y tiene en el origen el valor $\lim_{z\to a} f(z)$, que existe por el Teorema de la singularidad evitable de Riemann). Dicha serie converge en todo el disco $D(a;R)$.*

- *Cuando $z = a$ es un polo de f de orden m, $f(z) = F(z)/(z-a)^m$ en $D^*(a;R)$, con $f \in \mathcal{H}(D(a;R))$ y $F(a) \neq 0$. Escribiendo $F(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$, vemos que la parte principal de la serie de Laurent de f se reduce a la suma finita $\sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-a)^n$, siendo $c_{-m} = a_0 = \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$.*

- *Cuando $z = a$ es una singularidad esencial de f, la parte principal de la serie de Laurent tiene infinitos términos no nulos (por la eliminación de los dos casos anteriores). Puede que todos sean no nulos o sólo algunos de ellos pero habrá una cantidad infinita de términos no nulos.*

Veamos ahora unos ejemplos que ilustran cada uno de los casos posibles.

Ejemplo 7. *Como ya sabemos, la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable y, por tanto, puede considerarse como una función entera (definiendo que sea 1 su valor en el origen). Su serie de Laurent en la corona $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ se obtiene, simplemente, dividiendo la serie de Taylor de la función seno en el plano por z en dicha corona:*

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots, \quad z \neq 0.$$

Evidentemente, la serie de potencias obtenida a la derecha converge en todo el plano. La convergencia es uniforme en cada circunferencia centrada en el origen.

Ejemplo 8. *La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ tiene en $z = 0$ un polo doble, ya que la función $z^2 f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene límite finito y no nulo (de hecho, el límite es uno) cuando $z \to 0$. De nuevo, dividiendo la serie de Taylor de la función seno en el plano por z^3 en dicha corona, obtenemos*

$$\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \ldots$$

La serie de Laurent obtenida converge en el plano agujereado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, siendo la convergencia uniforme en subconjunto compacto.

Ejemplo 9. *La serie de Laurent de $f(z) = e^{3/z}$ se obtiene fácilmente del desarrollo de Taylor de la función exponencial:*

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

convergente absolutamente para todo w complejo y uniformemente en cada subconjunto compacto del plano. Sustituyendo $w = 3/z$, se obtiene una serie en z (la serie de Laurent):

$$f(z) = e^{3/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! z^n} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \frac{9}{2z^3} + \frac{27}{8z^4} + \dots,$$

convergente en todo $z \neq 0$ (es decir, en la "corona" $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$. Obviamente, la parte principal tiene infinitos términos no nulos y se trata de una singularidad esencial en $z = 0$ (como ya sabemos del Ejemplo 5, donde aparece una función muy similar). La convergencia de la serie de Laurant obtenida es uniforme en cada circunferencia centrada en el origen.

Ejercicio 4. *La función*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

tiene un polo simple en $z = 0$; también tiene otro en $z = 1$. Halle los desarrollos de f en serie de Laurent en cada una de las siguientes coronas

(a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$*;*

(b) $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$.

SOLUCIÓN. □ La serie de Laurent de f en la corona $\{z : 0 < |z| < 1\}$ puede obtenerse a partir del desarrollo de la serie geométrica, convergente en el disco unidad:

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots,$$

siendo la parte principal simplemente $-\frac{1}{z}$. La convergencia es uniforme y absoluta en cada circunferencia centrada en el origen y contenida en este dominio.

La serie de Laurent de la misma función en la corona $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$, donde f también es holomorfa, puede obtenerse mediante un procedimiento similar, usando también una serie geométrica pero buscando el desarrollo en potencias de $z-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(-(z-1))} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^{n-1} = \sum_{m=-1}^{\infty}(-1)^{m+1}(z-1)^m,\end{aligned}$$

siendo la parte principal $\frac{1}{z-1}$. La serie obviamente converge cuando $|z-1| < 1$, por las propiedades de las series geométricas (o por el Teorema 3).

Como vemos, en ambos casos se trata de polos simples y, por tanto, la parte principal de cada serie de Laurent sólo tiene un término: en un caso, el término con $\frac{1}{z}$ y en el otro, el término con $\frac{1}{z-1}$. ■

Por supuesto, también existe un desarrollo de Laurent de la función del Ejercicio 4 en la corona no acotada $\{z : 1 < |z| < +\infty\}$. Lo dejamos como ejercicio.

Sugerencia: conviene usar de nuevo la serie geométrica, esta vez teniendo en cuenta que cada punto z en la corona indicada satisface la condición $|z| < 1$, lo cual es equivalente a una condición que nos conviene: $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

Ejercicio 5. *La función*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

tiene un polo doble en $z = 0$. *Halle el desarrollo de* f *en serie de Laurent en la corona* $\{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$.

SOLUCIÓN. ☐ Puesto que necesitamos potencias de $z-1$, las creamos usando manipulaciones algebraicas simples:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1+(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$$

Como se puede ver, en la serie de Laurent de f, la parte de serie de potencias es nula y la parte principal tiene dos términos (la serie de Laurent coincide con su parte principal). ■

Ejercicio 6. *Escriba los primeros términos del desarrollo de la función*

$$f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z-1}$$

en serie de Laurent en la corona $\{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$. *Discutir el tipo de singularidad aislada en* $z = 1$.

SOLUCIÓN. ☐ Obtendremos la serie de Laurent deseada a partir del desarrollo de la función seno en serie de Taylor:

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots,$$

convergente para todo w: $|w| < +\infty$. Sustituyendo $w = \dfrac{1}{z-1}$, obtenemos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \frac{1}{7!(z-1)^7} + \dots,$$

convergente para $\left|\dfrac{1}{z-1}\right| < +\infty$; esto es, para $0 < |z-1| < +\infty$. Finalmente, multiplicando por $z = 1 + (z-1)$, obtenemos la serie deseada (después de multiplicar y reordenar los términos por potencias):

$$\begin{aligned}
f(z) &= [1+(z-1)]\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \frac{1}{7!(z-1)^7} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \frac{1}{7!(z-1)^7} + \dots + 1 - \frac{1}{3!(z-1)^2} + \frac{1}{5!(z-1)^4} - \frac{1}{7!(z-1)^6} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^4} + \frac{1}{5!(z-1)^5} \dots
\end{aligned}$$

La parte principal tiene infinitos términos y, por tanto, la singularidad en $z = 1$ es esencial. ■

Residuos: definición y cálculo

Residuos: definición. Veremos ahora un concepto importante relacionado con el comportamiento de una función cerca de su singularidad aislada.

Consideremos una función $f \in \mathcal{H}(D^*(a;R))$, $R>0$. Si $0<r<R$ y C_r denota a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a|=r\}$ con orientación positiva, entonces la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz$$

no depende del valor de $r \in (0,R)$. De hecho, es igual al coeficiente c_{-1} en el desarrollo de f en serie de Laurent en la corona $D^*(a;R)$.

Definición. El valor constante de las integrales de arriba se denomina el <u>residuo</u> de f en $z=a$ y suele denotarse como $\operatorname{Res}(f;a)$.

Observación. Cuando $z=a$ es una singularidad evitable de f, entonces $\int_{C_\rho} f(z)\,dz=0$ debido al Teorema integral de Cauchy y, por lo tanto, $\operatorname{Res}(f;a)=0$. En el caso de un polo o una singularidad esencial, el residuo puede ser no nulo. Veamos un par de ejemplos, basándonos en los desarrollos de Laurent hallados previamente.

Ejemplo 10. *Consideremos de nuevo la función* $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ *del Ejercicio 4, con un polo simple en* $z=0$. *Según la fórmula de arriba, vemos que* $\operatorname{Res}(f;0)=c_{-1}=-1$.

Asimismo, para la función $e^{3/z}$ *y su singularidad esencial en el origen, considerando la serie de Laurent de* f *calculada en el Ejemplo 9, obtenemos* $\operatorname{Res}(f;0)=c_{-1}=3$.

Ejemplo 11. *Consideremos de nuevo la función* $f(z)=z\operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$ *del Ejercicio 6, con una singularidad esencial en* $z=1$. *Como se puede ver de su desarrollo de Laurent, el residuo en dicha singularidad es* $\operatorname{Res}(f;1)=c_{-1}=1$.

Se plantea la siguiente pregunta natural: ¿cómo calcular el residuo, por ejemplo, en un polo cuando no conocemos el desarrollo en serie de Laurent (o cuando éste requiere bastante trabajo)?

El siguiente resultado nos dirá que, para calcular el residuo de una función de la forma $f(z)=\frac{F(z)}{z-a}$, con F holomorfa en un entorno agujereado de a y $F(a)\neq 0$, esencialmente hay que "quitar el denominador" y evaluar en a, quedando $\operatorname{Res}(f;a)=F(a)$. Por tanto, el cálculo del residuo es muy fácil para un polo simple. Para un polo de orden superior, el cálculo se complica un poco, ya que hay que involucrar las derivadas.

Proposición 3 *(Fórmulas para el residuo en un polo). Si* $z=a$ *es un polo simple de* f*, entonces*

$$\operatorname{Res}(f;a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

Si a *es un polo doble, entonces*

$$\operatorname{Res}(f;a)=\lim_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]'\,.$$

Más generalmente, si es un polo de orden m*, entonces*

$$\operatorname{Res}(f;a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\,.$$

DEMOSTRACIÓN. □ La demostración para un polo simple es inmediata. Al ser $z = a$ un polo simple de f, ésta se puede escribir en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto a como $f(z) = \frac{F(z)}{z-a}$, con $F \in \mathscr{H}(D(a;R))$, según la Proposición 2. Sea $0 < r < R$. La definición del residuo y la Fórmula integral de Cauchy implican inmediatamente que

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{F(z)}{z-a}\,dz = F(a) = \lim_{z\to a} F(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

En el caso de un polo de orden m, todo es similar: en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto a tenemos que $f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}$, con $F \in \mathscr{H}(D(a;R))$ y, por la Fórmula integral de Cauchy para la derivada de orden $m-1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f;a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{F(z)}{(z-a)^m}\,dz = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(z)}{(z-a)^m}\,dz \\ &= \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a} F^{(m-1)}(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\,. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 12. *El residuo en el polo simple $z = 0$ de la función g del Ejemplo 3 es*

$$\operatorname{Res}(g;0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\lim_{z\to 0}\cos z = 1\,.$$

El residuo en el polo doble $z = 1$ de la función f del Ejemplo 3 es

$$\operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}(z^2-2)' = \lim_{z\to 1} 2z = 2\,.$$

Teorema de los residuos y sus aplicaciones

El Teorema de los residuos tiene numerosas aplicaciones en Análisis en general. Aquí nos centraremos en las aplicaciones cuantitativas al cálculo de integrales. Debido a la falta de tiempo, nuestra selección será muy limitada. De hecho, la mayor parte de los ejemplos se dejan para una segunda lectura (posterior al examen final).

Teorema de los residuos. Algunas aplicaciones directas

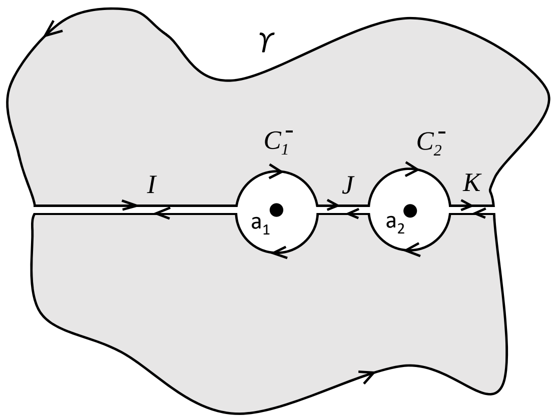
Teorema de los residuos. ¿Cómo integrar a lo largo de un contorno una función con varias singularidades aisladas dentro de dicho contorno? La respuesta viene dada por el siguiente resultado fundamental.

Teorema 5 *(Teorema de los residuos). Sea Ω un dominio y γ un contorno contenido en Ω, junto con su dominio interior, $D_{\text{int}}(\gamma)$. Sea f una función analítica en Ω, salvo en las singularidades aisladas a_1, a_2, ..., a_n, todas ellas contenidas en $D_{\text{int}}(\gamma)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f;a_k)\,.$$

Observación. La fórmula integral de Cauchy constituye el caso especial $n = 1$ de este teorema (un polo simple), mientras que la fórmula de Cauchy generalizada para la derivada de orden n corresponde al caso de un polo de orden mayor que uno.

DEMOSTRACIÓN. Basta rodear cada singularidad a_k mediante una circunferencia C_k de radio pequeño (para que los discos cerrados correspondientes estén contenidos en Ω y sean disjuntos). Ilustramos la prueba en el dibujo para el caso de dos singularidades.



La demostración sigue exactamente la misma idea que una proposición de los apuntes sobre el teorema de Cauchy, con un contorno γ dentro de otro, Γ. También divideremos el dominio entre ambas curvas en dos dominios, esta vez usando $n+1$ segmentos (que, en el caso $n = 2$ representado en el dibujo, son tres: I, J y K), obteniendo dos contornos, uno superior y otro inferior. La integral a lo largo de cada uno de los contornos es cero y, debido a las cancelaciones de las integrales en direcciones opuestas (la integral sobre I y sobre I^-, etc.), resulta que

$$\int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^-} f(z)\,dz = 0$$

y, por tanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k)\,. \qquad \blacksquare$$

Cálculo de ciertas integrales complejas usando el Teorema de los residuos. Veremos primero unos ejemplos de aplicación directa del Teorema 5.

Ejercicio 7. *Siendo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule $\int_{\mathbb{T}} e^{3/z}\,dz$.*

SOLUCIÓN. □ Obviamente, $z = 0$ es la única singularidad aislada de $f(z) = e^{3/z}$ en el plano. Ya sabemos del Ejemplo 9 que $\operatorname{Res}(e^{3/z}; 0) = 3$. Por el Teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} e^{3/z}\,dz = 6\pi i\,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 8. *Dada la función* $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1}$ *y la circunferencia* $\gamma = \{z:\ |z-6| = 1\}$, *calcule la integral* $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.

SOLUCIÓN. □ No sería fácil trabajar con la serie de Laurent alrededor de $z = 2\pi$ ya que el denominador no es un polinomio, así que calculamos el residuo de forma directa.
Empleando el mismo razonamiento que en el Ejercicio 2 (sólo el numerador es diferente, siendo el denominador el mismo), averiguamos que $z = 2\pi$ es el único polo de la función f en el dominio interior al contorno γ y que en γ la función es continua.

Veamos ahora que el polo es doble. Escribiendo $w = z - 2\pi$, obsevando que $w \to 0$ cuando $z \to 2\pi$ y recordando que la función coseno es periódica con periodo 2π, aplicando la regla de L'Hôpital y recordando que $\lim_{w\to 0} \frac{w}{\operatorname{sen} w} = 1$, vemos que

$$\lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)^2}{\cos z - 1} = \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)^2}{\cos(z-2\pi) - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2}{\cos w - 1} = -2 \neq \infty.$$

Finalmente, podemos calcular el residuo usando la fórmula para el residuo en un polo doble. Recordando la fórmula $\lim_{w\to 0} \frac{\cos w - 1}{w^2} = -\frac{1}{2}$, concluimos que

$$\lim_{w\to 0} \frac{(\cos w - 1)^2}{w^4} = \frac{1}{4}.$$

Usando la periodicidad del coseno: $\cos z = \cos(z - 2\pi)$ y el mismo cambio de variable que antes: $w = z - 2\pi$, aplicando un poco de álgebra (siendo clave el truco de dividir por w^4 en el numerador y en el denominador, para usar la fórmula anterior) y, al final, L'Hopital dos veces, obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 2\pi) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \left(\frac{(z-2\pi)^2}{\cos z - 1} \right)' = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{2(z-2\pi)(\cos z - 1) + (z-2\pi)^2 \operatorname{sen} z}{(\cos z - 1)^2} \\
&= 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{2w(\cos w - 1) + w^2 \operatorname{sen} w}{(\cos w - 1)^2} = 2\pi i \frac{\lim_{w\to 0} \frac{2w(\cos w - 1) + w^2 \operatorname{sen} w}{w^4}}{\lim_{w\to 0} \frac{(\cos w - 1)^2}{w^4}} \\
&= 4 \cdot 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{2w(\cos w - 1) + w^2 \operatorname{sen} w}{w^4} = 8\pi i \lim_{w\to 0} \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3} \\
&= 8\pi i \lim_{w\to 0} \frac{w \cos w - \operatorname{sen} w}{3w^2} = 8\pi i \lim_{w\to 0} \frac{-w \operatorname{sen} w}{6w} = 0.
\end{aligned}$$

Se ha elegido precisamente la potencia w^4 y no otra para que el denominador tuviera límite finito. Ásí hemos evitado más usos repetidos de L'Hopital. ■

Ejercicio 9. *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2 - 1},$$

donde γ *es la circunferencia unidad:* $\gamma = \{z:\ |z| = 1\}$, *dotada de la orientación positiva.*

SOLUCIÓN. $\Box$ El problema se puede resolver de distintas maneras. En una entrega anterior ya vimos una, usando fracciones simples para poder aplicar la Fórmula integral de Cauchy. He aquí otra solución, vía el teorema de los residuos. La función

$$f(z) = \frac{2}{4z^2-1} = \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

evidentemente tiene dos polos simples en el plano complejo: $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$, ambos dentro de la curva γ, que es simple, cerrada y C^1. Por tanto, aunque la fórmula integral de Cauchy no sea aplicable directamente, el *Teorema de los residuos* sí lo es:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;a_1) + \operatorname{Res}(f;a_2)\right).$$

Para evaluar esos residuos, utilizamos la fórmula habitual para el residuo en un polo simple:

$$\operatorname{Res}(f;a_1) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

De manera análoga, $\operatorname{Res}(f;a_2) = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = 0. \qquad \blacksquare$$

A continuación veremos diversas aplicaciones de carácter cuantitativo y relativas al cálculo de integrales reales (trigonométricas o de ciertas integrales impropias).

Aplicacion del Teorema de los residuos a la integración de ciertas funciones trigonométricas

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Podemos parametrizarla, escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ como

$$z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Además, como ya sabemos de clase, se deduce de la fórmula de Euler que

$$z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t, \qquad z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t.$$

Por consiguiente,

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \qquad \operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

para los puntos $z = e^{it} \in \mathbb{T}$. Observemos que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y, por tanto, $dt = dz/(iz)$.

Cuando u es una función elemental de dos variables reales, todo esto nos permite escribir las diferentes integrales trigonométricas de la forma

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$$

como integrales de una función compleja sobre el contorno $\mathbb{T}$:

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = \int_{\mathbb{T}} u\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz},$$

transformando así la integral inicial de una función real en otra integral de una función de la variable z. En nuestros ejemplos, esta nueva función de z será analítica y con frecuencia racional, así que luego podremos aplicar la Fórmula integral de Cauchy o el Teorema de los residuos.

Ejercicio 10. *Calcule el valor de la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5-4\operatorname{sen} t}\, dt.$$

SOLUCIÓN. □ De manera similar a las deducción de las fórmula de arriba, también obtenemos

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right), \qquad z = e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Aplicando las fórmulas indicadas, se deduce que

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}{5-\frac{2}{i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}\, dz$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}$$

tiene tres polos: un polo doble $z=0$ y dos simples: $z=2i$ y $z=i/2$. Esto es cierto porque $z=2i$ y $z=i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2+5iz+2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2+5iz+2 = -2(z-\frac{i}{2})(z-2i)$$

y, por tanto,

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)} = \frac{z^4+1}{-4z^2(z-\frac{i}{2})(z-2i)}.$$

Dos de los polos se encuentran dentro de $\mathbb{T}$: el polo simple $i/2$ y el doble $z=0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), después de un cálculo rutinario basado en la proposición de la entrega anterior de apuntes para el cálculo del residuo en un polo, obtenemos:

$$\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2}) = \frac{17i}{24}, \qquad \operatorname{Res}(f;0) = \frac{-5i}{8}.$$

Por el Teorema de los residuos, obtenemos

$$I = 2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2})+\operatorname{Res}(f;0)\right) = -\frac{\pi}{6}. \qquad \blacksquare$$

Preparado por Dragan Vukotić, UAM
Dibujos: José Pedro Moreno, UAM