Variable Compleja I (Curso 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Aplicaciones cualitativas de los teoremas integrales

En esta entrega de apuntes veremos varios resultados cualitativos acerca del comportamiento de funciones analíticas. Esos teoremas constituyen el comienzo de un área que se suele denominar Teoría geométrica de funciones. Puede resultar un tanto sorprendente que un resultado de carácter, aparentemente, cuantitativo como la fórmula integral de Cauchy, tenga implicaciones importantes de carácter cualitativo (teoremas de tipo geométrico-topológico que describen el comportamiento de la imagen de un dominio por una función holomorfa).

La fórmula integral de Cauchy, en su caso más básico, se traduce al denominado Teorema del valor medio, que nos permite deducir el Principio del módulo máximo. A partir de éste probaremos el Lema de Schwarz, una herramienta muy útil en la teoría geométrica de funciones. Dicho resultado nos permitirá finalmente identifiar las aplicaciones holomorfas y biyectivas del disco sobre sí mismo (llamadas automorfismos del disco), un punto relevante en el tema de aplicaciones conformes que vendrá al final del curso (o en el curso de Variable Compleja II).

A continuación veremos que de la fórmula integral de Cauchy también se deduce el Principio del argumento, el cual nos servirá para probar el Teorema de Rouché, otro de carácter cuantitativo. De él ya obtendremos un resultado puramente cualitativo (métrico-topológico) como es el Teorema de la aplicación abierta para las funciones analíticas. En resumen, podríamos decir que todos los resultados cualitativos que veremos en estos apuntes son, en el fondo, consecuencias la fórmula integral de Cauchy.

Teorema del valor medio

El siguiente resultado es una consecuencia fácil de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1 *(Teorema del valor medio). Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $\overline{D}(a;R)\subset\Omega$ y $0<r<R$, entonces*

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

Demostración. □ Aplicamos la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia C de centro a y radio r, parametrizada de forma habitual:

$$z=a+re^{it},\quad 0\le t\le 2\pi;\qquad dz=rie^{it}\,dt,$$

obteniendo

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}\,rie^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.\qquad\blacksquare$$

Corolario 1 *(Teorema del valor medio para las funciones armónicas). Sea Ω un dominio en el plano y sea u una función armónica en Ω y con valores reales. Si $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$ y $0 < r < R$, entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Ya sabemos que toda función armónica u con valores reales en el disco abierto $D(a;R)$ puede completarse hasta obtener una función analítica (aplicando el típico procedimiento de integración a partir de la ecuaciones de Cauchy-Riemann): existe f holomorfa en $D(a;R)$ tal que $f = u + iv$. Aplicando el Teorema 1 a f y tomando parte real, obtenemos la identidad deseada para u. ■

Principio del módulo máximo

El teorema del valor medio nos permite deducir un resultado básico pero fundamental en Variable Compleja, que tiene distintas formulaciones.

Teorema 2 *(Principio del módulo máximo). Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ tiene máximo local en un punto del dominio Ω, entonces f es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un punto $a \in \Omega$ y un radio $R > 0$ tales que $D(a;R) \subset \Omega$ y $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in D(a;R)$. Sea $0 < r < R$. Aplicando el Teorema 1, concluimos que

$$|f(a)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt.$$

Por tanto,

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt - |f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(|f(a+re^{it})| - |f(a)|\Big)\,dt \leq 0,$$

debido a la hipótesis de que $|f(a+re^{it})| - |f(a)| \leq 0$ para $0 < r < R$ y para todo $t \in [0,2\pi]$. Por la continuidad de $|f(z)| - |f(a)|$, se sigue que $|f(a+re^{it})| - |f(a)| = 0$ para $0 < r < R$ y para todo $t \in [0,2\pi]$. En otras palabras, $|f(z)| = |f(a)|$, constante, para todo $z \in D(a;R)$. Por un resultado ya visto antes (y también por uno de los ejercicios de la Hoja 3), esto implica que f es constante en $D(a;R)$. Puesto que el disco $D(a;R)$ tiene puntos de acumulación interiores, podemos aplicar el Teorema de continuación única (principio de unicidad) para concluir que f es constante en todo Ω. ■

Observaciones. (1) Dicho en un lenguaje menos formal, el Principio del módulo máximo nos indica que la gráfica de la función $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$, vista como el subconjunto $\{(z, |f(z)|) = (x, y, |f(x+yi)| : z \in \Omega\}$ de $\mathbb{R}^3$ que se erige sobre el dominio Ω en el plano, es un "paisaje sin picos": todo lo que se ve son "cuestas" (según nos acercamos a la frontera) y "valles".

(2) Es importante notar que sí pueden existir "valles" (mínimos locales) porque no tenemos un "Principio del módulo mínimo", al menos no uno calcado al Principio del módulo máximo (sin condiciones adicionales). Por ejemplo, la función $f(z) = z$ que, obviamente, cumple $|f(z)| = |z| \geq 0 = |f(0)|$, alcanza su módulo mínimo (global) en el plano, concretamente en el origen. Sin embargo, si exluimos la posibilidad de que f se anule en el dominio donde es holomorfa, obtendremos una versión correcta del principio del módulo mínimo.

Ejercicio 1. *Demuestre la siguiente afirmación (Principio del módulo mínimo). Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $|f|$ no alcanza su mínimo en Ω.*

SOLUCIÓN. □ Supongamos lo contrario: que sí lo alcanza. Puesto que f no se anula en Ω, la función $g = 1/f$ también es holomorfa en Ω y su módulo $|g|$ alcanza su máximo en Ω. Por el Teorema 2, g es constante y, por tanto, también lo es f. ■

Para las funciones que satisfacen condiciones adicionales, existe una formulación más especial (con hipótesis adicionales) del principio del módulo máximo. El siguiente teorema se refiere al caso cuando f, aparte de ser holomorfa en un dominio acotado Ω, es también continua en la clausura de Ω y nos aporta más: no sólo nos dice que la función no alcanza su módulo máximo en el dominio sino que lo alcanza obligatoriamente en la frontera del dominio.

Teorema 3 *(Principio del módulo máximo, versión débil). Sea Ω un dominio acotado en el plano y f una función holomorfa en Ω y continua en su cierre $\overline{\Omega}$. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)|.$$

Es decir, el módulo máximo en este caso sólo se puede alcanzar en el borde del dominio si f no es constante. (Si es constante, se alcanza trivialmente en todo $\overline{\Omega}$.)

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que, al ser continua, la función $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$. Si f no es constante, según el Teorema 2, el módulo máximo no se puede alcanzar en Ω y, por tanto, se tiene que alcanzar en $\partial\Omega$. ■

Observación. Conviene notar que este resultado nos dice que si f es holomorfa en Ω, un dominio acotado, y continua en su cierre $\overline{\Omega}$ y $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \partial\Omega$, entonces $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \Omega$. Usaremos este detalle con frecuencia.

El siguiente ejercicio es un obvio modelo de pregunta de tipo test para un examen de esas características.

Ejercicio 2. *Sea $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ el disco unidad y $\overline{\mathbb{D}}$ su cierre. Sea f una función no constante, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Sólo una de las siguientes situaciones es posible. ¿Cuál de ellas?*

(a) $|f| \le 3$ *en* $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = -3$;
(b) $|f| \le 3$ *en* $\overline{\mathbb{D}}$, $f(1) = 3$;
(c) $|f| \le 3$ *en* $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$;
(d) Se cumple $f(1/2) = 4$; *ademas, si* $x^2 + y^2 = 1$ *entonces* $|f(x + iy)| = 3$.

SOLUCIÓN. $\square$ Dado que f no es constante, debe alcanzar su máximo en el borde del dominio.
En las condiciones (a) y (c), la función está acotada por 3 en módulo pero sus valores en los puntos indicados en el dominio también son números de módulo 3, lo cual contradice al Principio del módulo máximo en su versión débil, Teorema 3.
En el apartado (d), la situación es aún peor porque la segunda condición implica que $|f| \le 3$ en todo el disco (también por el Teorema 3) pero en un punto en el interior tiene módulo 4, lo cual es imposible.
Sin embargo, la situación indicada en (b) es posible, siendo el punto $z = 1$ un punto del borde del dominio. Un ejemplo concreto sería la función $f(z) = z + 2$ que cumple las condiciones del apartado (b). $\blacksquare$

Ejercicio 3. *Demuestre la siguiente afirmación. Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω donde cumple $|f(z)| \le 1$ entonces, de hecho, $|f(z)| < 1$ en Ω.*

SOLUCIÓN. $\square$ Supongamos que existe un punto $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| = 1$. Entonces $|f|$ alcanza su máximo (global) en Ω y, por el Principio del módulo máximo (Teorema 2), f es constante. $\blacksquare$

El siguiente ejercicio require un manejo delicado. Debido a su carácter “teórico”, también se puede omitir en una primera lectura.

Ejercicio 4. *Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \le 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$.*

SOLUCIÓN. $\square$ Si f es constante, digamos $f \equiv C$, entonces $|C| \le 1 - |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Dejando que $|z| \to 1^-$, obtenemos $|C| \le 0$ y se deduce que $C = 0$, lo cual prueba la afirmación del problema.
Nos queda ver que es imposible el caso de una función f no constante. La idea principal consiste en demostrar que, bajo las hipótesis del problema, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dejando que $\varepsilon \to 0^+$, esto implicará que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, lo cual estará en contradicción con nuestras hipótesis. Para completar esta reducción al absurdo, sólo nos queda hacer demostrar de forma rigurosa la afirmación “para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$”.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si $|z| > 1 - \varepsilon$, entonces por las hipótesis del problema, $|f(z)| \le 1 - |z| < \varepsilon$. Veamos qué es lo que ocurre en el resto del disco, es decir, cuando $|z| \le 1 - \varepsilon$. El conjunto $K_\varepsilon = \{z : |z| \le 1 - \varepsilon\}$ es cerrado y acotado y, por tanto, compacto así que la función continua $|f|$ alcanza en él su máximo:

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

para cierto $z_0 \in K_\varepsilon$. Si este máximo fuera $\ge \varepsilon$, entonces el módulo máximo de $|f|$ en $\mathbb{D}$ sería justo $|f(z_0)|$ ya que en el resto f tiene módulo menor que ε. Pero el Principio del módulo máximo (su primera versión, Teorema 2, ya que la función no está definida en el borde de $\mathbb{D}$) nos dice que una función holomorfa y no constante no puede alcanzar su módulo máximo en un punto del dominio (en este caso, no puede hacerlo en z_0). Por lo tanto, se sigue que

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| < \varepsilon,$$

así que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto completa la demostración. $\blacksquare$

Lema de Schwarz

Lema de Schwarz. El siguiente resultado es una consecuencia del Principio del módulo máximo y resulta muy útil en la teoría de funciones analíticas en el disco unidad.

Teorema 4 *(Lema de Schwarz). Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, que cumple las siguientes condiciones: $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$. Entonces:*

(a) $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

(b) $|f'(0)| \le 1$.

Si se tiene la igualdad en (a) para un $z \ne 0$ o en (b), entonces f es una rotación: $f(z) = \lambda z$ para cierto número λ tal que $|\lambda| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que por hipotesis $f(0) = 0$, al ser f diferenciable en el origen, se sigue que

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)\,.$$

Consideremos la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } 0 < |z| < 1, \\ f'(0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$, debido a un resultado sobre la factorización de los ceros de la entrega anterior de apuntes.

Sea r un valor arbitrario tal que $0 < r < 1$ y consideremos un w arbitrario con $|w| = r$. Entonces

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{r} \le \frac{1}{r}\,.$$

Por el Teorema 3, se sigue que $|g(z)| \le \frac{1}{r}$, para todo z con $|z| \le r$.

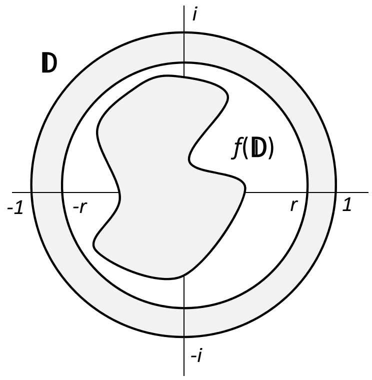
Puesto que para cualquier $z \in \mathbb{D}$ fijo podemos encontrar un $r \in (0,1)$ tal que $|z| \le r$, por lo expuesto tendremos también $|g(z)| \le \frac{1}{r}$. Manteniendo z fijo y dejando que $r \to 1^-$, se sigue que $|g(z)| \le 1$. Puesto que esto se cumple para $z \in \mathbb{D}$ arbitrario, se sigue que $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, por la definición de g, se tiene la desigualdad $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Para $z = 0$ se cumple lo mismo por hipótesis: $f(0) = 0$. Esto demuestra el apartado (a).

(b) Tanto si se cumple la igualdad en (a) para un $z \ne 0$: $|f(z)| = |z|$ (es decir, $|g(z)| = 1$) o se cumple en (b): $|f'(0)| = |g(0)| = 1$, concluimos que $|g|$ alcanza su máximo en un punto en $\mathbb{D}$. Por el Teorema 2, se sigue que g es constante, digamos $g \equiv \lambda$, con $|\lambda| = 1$. Por tanto, $f(z) = \lambda z$, para el mismo valor λ. ■

Observaciones. (1) Debido al mismo razonamiento que en el Ejercicio 3, la hipótesis "$|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$" en el Lema de Schwarz es equivalente a la aparentemente más fuerte "$|f(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$". Por eso con frecuencia también enunciamos el Lema de Schwarz tomando como hipótesis $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ (es decir, si $|z| < 1$, entonces $|f(z)| < 1$) pero es absolutamente indiferente cuál de las dos formulaciones se elige.

(2) Recordemos que, geométricamente, la multiplicación de un número complejo por una constante fija de módulo uno no altera su módulo, sólo su arguménto, sumándole un valor fijo. Por tanto, la función de multiplicación $z \mapsto \lambda z$, con $|\lambda| = 1$, representa una rotación en el plano.

(3) Obsérvese que el Lema de Schwarz es un "principio de automejora": sabiendo que una función holomorfa está acotada por uno (y algo más), concluimos que automáticamente, en cada punto z, está acotada por una cantidad inferior a uno, a saber, por $|z|$. Eso también nos dice que, para cualquier función holomorfa, acotada por uno y que fija el origen, la imagen de un disco de radio r y centrado en el origen está estrictamente contenida en el mismo disco de radio r, sin tocar su borde (o sea, tal f es contractiva en un sentido estricto). Véase la figura abajo.



Ejercicio 5. *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le |z+3/2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que $|f(1/2)| \le 1$ y hállense todas las funciones para las que se cumple la igualdad.*

SOLUCIÓN. $\square$ Consideremos la función auxiliar $g(z) = \frac{f(z)}{z+3/2}$. Dado que $z \neq -3/2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, $g(0) = 0$, así que podemos aplicar el Lema de Schwarz a esta función para deducir que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $|f(z)| \le |z||z+3/2|$. En particular, para $z = 1/2$, se obtiene que $|f(1/2)| \le 1$.
Si se cumple la igualdad en $|f(1/2)| \le 1$, esto significa que $|g(1/2)| = 1/2$ y, por tanto, tenemos la igualdad en el Lema de Schwarz. Sabemos que esto sólo es posible cuando $g(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$, es decir, cuando $f(z) = \lambda z(z+3/2)$, $|\lambda| = 1$. $\blacksquare$

Ejercicio 6. *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y cumple la desigualdad $|zf(z)| \le e^{\operatorname{Re} z}$ en $\mathbb{D}$. Demuestre que entonces se tiene la desigualdad más fuerte $|f(z)| \le e^{\operatorname{Re} z}$ en $\mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. $\square$ (Conviene observar que la desigualdad es más fuerte porque $|zf(z)| \le |f(z)|$ en $\mathbb{D}$.)
Consideremos la función g dada por $g(z) = zf(z)e^{-z}$. Es obvio que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y, por hipótesis, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, puesto que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Por el Lema de Schwarz se sigue que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Es decir, $|zf(z)| \le |z|e^{\operatorname{Re} z}$ en $\mathbb{D}$ y, por tanto, $|f(z)| \le e^{\operatorname{Re} z}$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. La desigualdad para $z = 0$ se sigue por continuidad, pasando al límite cuando $z \to 0$. $\blacksquare$

Principio del argumento. Teorema de Rouché

En esta sección aprenderemos cómo contar el número de ceros que tienen ciertas funciones analíticas en un dominio. Por tanto, estos primeros resultados también tienen un carácter cuantitativo. Empezamos con una observación fácil pero relevante que formularemos como lema.

Lema 1. *Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno, contenido en Ω junto con el dominio que acota y orientado positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en la traza $\{\gamma\}$, entonces f tiene un número finito de ceros en el dominio D_{int} interior a la traza (el dominio acotado por γ).*

DEMOSTRACIÓN. El cierre del dominio D_{int} es un conjunto cerrado y acotado y, por tanto, compacto. Si f tuviese infinitos ceros distintos en $\overline{D_{\text{int}}}$, digamos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, por compacidad existiría una subsucesión de los ceros $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $c \in \overline{D_{\text{int}}}$. Si el punto c estuviese en D_{int}, por el Principio de los ceros aislados, f sería idénticamente nula, lo cual es imposible (ya que no se anula en la traza de γ). Por tanto, la subsucesión $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sólo puede converger a un punto $d \in \{\gamma\}$, pero entonces por la continuidad de f obtendríamos $f(d) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = 0$, lo cual es imposible por las hipótesis sobre f. Contradicción. Por tanto, sólo puede haber una cantidad finita de ceros de f en el dominio interior a γ. ■

Recordemos que cada cero de una función analítica no idénticamente nula tiene un orden finito (o multiplicidad finita). Puesto que algunos ceros pueden ser múltiples (es decir, de orden mayor que uno), contaremos cada cero teniendo en cuenta su multiplicidad, de manera que, por ejemplo, un cero simple, un cero doble y otro de orden 4 contarán como 7 ceros en total. Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el primer resultado que nos interesa.

Teorema 5 *(Principio del argumento). Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno, contenido en Ω junto con el dominio D_{int} que acota y orientado positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en γ y con N ceros en el dominio interior a γ (teniendo en cuenta las multiplicidades), entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya constatamos en el Lema 1 que f sólo puede tener una cantidad finita de ceros en el dominio interior a γ. Sean esos ceros: a_1 (con multiplicidad m_1), a_2 (con multiplicidad m_2), ..., a_k (con multiplicidad m_k). Por hipótesis, el número total de ceros en el interior de γ es $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = N$.

Recordemos una simple fórmula para la derivada del producto de N funciones, probablemente ya conocida de otras asignaturas. Si $f = f_1 f_2 \ldots f_N$, entonces por la regla del producto obtenemos (en todos los puntos donde f no se anula)

$$f' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_m + f_1 f_2' f_3 \cdots f_m + \ldots f_1 f_2 \cdots f_{m-1} f_m'$$

y, por tanto, en los mismos puntos se tiene

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_m'}{f_m}$$

Como consecuencia de esta fórmula general, obtendremos una especial para la función holomorfa f que cumple las condiciones del teorema. Teniendo en cuenta los ceros de f en el interior de γ y sus multiplicidades, por uno de los teoremas de la entrega de apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas, se sigue que

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\dots(z-a_k)^{m_k}g(z)\,,$$

donde g es holomorfa en Ω y no tiene ceros ni en el dominio interior a γ ni en la traza de γ. Por la fórmula anterior para las derivadas, dado que $(\big(z-a_j)^{m_j}\big)' = m_j(z-a_j)^{m_j-1}$, obtenemos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1 z-a_1)^{m_1-1}}{(z-a_1)^{m_1}} + \frac{m_2(z-a_2)^{m_2-1}}{(z-a_2)^{m_2}} + \dots + \frac{m_k(z-a_k)^{m_k-1}}{(z-a_k)^{m_k}} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m_1}{z-a_1} + \frac{m_2}{z-a_2} + \dots + \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,,$$

para todo $z \in \overline{D_{\text{int}}} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Teniendo en cuenta que g no se anula ni en D_{int} ni en la traza de γ y, por tanto, no se anula en el compacto $\overline{D_{\text{int}}}$, usando la continuidad de g podremos identificar para cada punto de $\overline{D_{\text{int}}}$ un disco abierto (pequeño y contenido en Ω) donde g no se anula. Puesto que estos discos recubren el compacto $\overline{D_{\text{int}}}$, podemos extraer un subrecubrimiento finito cuya unión es un dominio D tal que $\overline{D_{\text{int}}} \subset D \subset \Omega$ y g no se anula en D. Por tanto, la función $g'/g \in \mathcal{H}(D)$ y podemos aplicar el Teorema integral de Cauchy a γ para deducir que $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_1}{z-a_1}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_2}{z-a_2}\,dz + \dots + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_k}{z-a_k}\,dz = m_1 + m_2 + \dots m_k = N\,,$$

aplicando a cada una de las k integrales la Fórmula integral de Cauchy (con una función constante en el numerador). ■

Observación. ¿Por qué el Teorema 5 se denomina Principio del argumento? Existen para ello razones geométricas que procedemos a explicar.

Por razones topológicas obvias, la imagen $f(\gamma)$ de una curva γ, suave a trozos y cerrada, por una función holomorfa f también es una curva suave a trozos y cerrada, así que también se podrá hablar de su índice respecto de distintos puntos. Haciendo el cambio de variable $w = f(z)$, para $z \in \{\gamma\}$, obtenemos $dw = f'(z)\,dz$ y, por tanto,

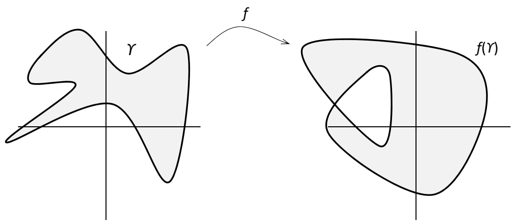
$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \text{Ind}_{f(\gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f\,. \tag{1}$$

Recordaremos de otras entregas de apuntes que

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-0}$$

es el índice de la curva γ respecto al origen, es decir, el número de vueltas que da γ alrededor del origen.

En la fórmula (1), hemos usado la notación $\Delta_\gamma \arg f$ para denotar la variación total del argumento de punto f a lo largo de γ (el cambio del argumento del punto $f(z)$ cuando z recorre la curva γ), que viene a ser lo mismo que 2π por el número de vueltas que da γ alrededor del origen (siendo, por ejemplo, 2π el cambio de argumento que corresponde a una vuelta en el sentido positivo alrededor del origen). De ahí la última igualdad y el nombre del teorema.



Una consecuencia bastante directa del Principio del argumento es el llamado teorema de Rouché que probaremos a continuación. En lo que sigue, usaremos $N_\gamma(f)$ para denotar el número de ceros que tiene la función f en el dominio interior a un contorno γ.

Teorema 6 *(Teorema de Rouché). Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno contenido en Ω junto con el dominio que acota. Si $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y satisfacen la desigualdad $|f(z)| > |g(z)|$ para todo z en γ, entonces las funciones f, $f-g$ y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a γ: $N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g) = N_\gamma(f+g)$, contando multiplicidades.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $|-g| = |g|$, basta demostrar que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. Entonces se seguirá que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g)$ aplicando la ígualdad anterior al par f y $-g$ en lugar del par f y g.

Veamos, pues, la prueba de $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. La hipótesis $|f| > |g|$ en $\{\gamma\}$ implica que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \{\gamma\}$. Por tanto, también se cumple $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ en $\{\gamma\}$. Puesto que $|w| = |-w| \geq \mathrm{Re}(-w) = -\mathrm{Re}\, w$ para todo $w \in \mathbb{C}$, se sigue que $\mathrm{Re}\, w \geq -|w|$ y, en particular, que $\mathrm{Re}\,\frac{g}{f} > -1$ en $\{\gamma\}$ y, por tanto,

$$0 < \mathrm{Re}\left(1 + \frac{g}{f}\right) \leq \left|1 + \frac{g}{f}\right| < 2 \qquad \text{en } \{\gamma\}.$$

Esto significa que la curva imagen $\left(1 + \frac{g}{f}\right)(\gamma)$ está completamente ubicada en el semiplano derecho abierto y, por tanto, no da ninguna vuelta alrededor del origen. En otras palabras, el cambio de argumento a lo largo de γ de la función $1 + \frac{g}{f}$ es cero. Observando que el cambio total del argumento del producto es la suma de los cambios del argumento de los factores, vemos que

$$\Delta_\gamma \arg(f+g) = \Delta_\gamma \arg\left(f\left(1 + \frac{g}{f}\right)\right) = \Delta_\gamma \arg f + \Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right) = \Delta_\gamma \arg f.$$

Según la observación después del Teorema 6 y la fórmula (1), se sigue que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. ■

Ejercicio 7 *Sea Ω un dominio plano que contiene al disco unidad, $\mathbb{D}$ y f una función holomorfa en Ω tal que $|f(z)| < 1$ para todo z que cumple $|z| = 1$. Demuestre que f tiene en $\mathbb{D}$ exactamente un punto fijo (un punto a tal que $f(a) = a$).*

SOLUCIÓN. □ Decir que a es un punto fijo de f es equivalente a decir que a es una solución de la ecuación $z - f(z) = 0$. El Teorema de Rouché nos ayudará a contar el número de ceros de esta función en $\mathbb{D}$. Dado que en la circunferencia unidad las funciones f y z, ambas holomorfas en Ω, cumplen la desigualdad estricta $|f(z)| < 1 = |z|$, se sigue por Rouché que $z - f(z)$ tiene en $\mathbb{D}$ el mismo número de ceros que la función identidad, que es exactamente uno. ■

El siguiente ejercicio ilustra el uso del Teorema de Rouché en la práctica y es uno de los tipos de problemas muy comunes en los exámenes de Variable Compleja en todas partes.

Ejercicio 8 *Halle el número de soluciones de la ecuación* $3z^4 + 7z^3 - z + 2 = 0$ *en el disco unidad* $\mathbb{D}$ *y en su exterior* $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

SOLUCIÓN. □ Lo que buscamos es el número de ceros de la función $f + g$ en el interior de la circunferencia unidad, $\gamma = \{z : |z| = 1\}$, donde $f(z) = 7z^3$ y $g(z) = 3z^4 - z + 2$. Ambas son enteras y en $\{\gamma\}$ satisfacen la desigualdad

$$|f(z)| = 7 > 6 \geq 3|z|^4 + |-z| + 2 \geq |3z^4 - z + 2| = |g(z)|,$$

debido a la desigualdad triangular. Por tanto, tenemos en γ la desigualdad estricta $|f(z)| > |g(z)|$ y podemos aplicar el Teorema de Rouché: el número de ceros de la función $(f+g)(z) = 3z^4 + 7z^3 - z + 2$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es igual al de la función f. Ya sabemos que éste es igual a 3, teniendo en cuenta las multiplicidades. Por tanto, la función $f + g$ tiene 3 ceros en $\mathbb{D}$.
Al ser un polinomio de grado 4, la función $f + g$ tiene 4 ceros en el plano, contando las multiplicidades. Es fácil ver que no tiene ningún cero en la circunferencia unidad $\gamma = \partial\mathbb{D}$; esto se sigue de la desigualdad demostrada arriba y la desigualdad triangular: $|f + g| \geq |f| - |g| > 0$ en γ. Por tanto, sólo tiene un cero en el exterior del disco. ■

Observación. Es importante notar que la desigualdad en las condiciones del Teorema de Rouché: $|f(z)| > |g(z)|$ tiene que ser estricta. El enunciado sería falso con la hipótesis $|f(z)| \geq |g(z)|$. Conviene pensar en un ejemplo. (Nótese que las aplicaciones del teorema con esta desigualdad más débil suelen ser un error tradicional en los exámenes de desarrollo.)

Teorema de la aplicación abierta

En Topología vimos el concepto de una aplicación abierta y ahora veremos que Variable Compleja nos proporciona una cantidad abundante de ejemplos de tales aplicaciones: ¡todas las funciones holomorfas no constantes! Por supuesto, seguimos trabajando con la topología usual del plano.

Teorema 7 *(Teorema de la aplicación abierta). Sea* Ω *un dominio en el plano y* f *una función holomorfa en* Ω*. Entonces bien* f *es constante, bien es una aplicación abierta: para todo* $U \subset \Omega$ *abierto en el plano, el conjunto* $f(U)$ *es también abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f no es constante y veamos que es una aplicación abierta. Sea $U \subset \Omega$ un abierto y $b \in f(U)$ un punto arbitrario. Hemos de ver que b es un punto interior de $f(U)$; en otras palabras, que existe $\delta > 0$ tal que $D(b;\delta) \subset f(\Omega)$.

Puesto que $b \in f(U)$, existe $a \in U$ tal que $b = f(a)$. El razonamiento que sigue suele usarse con frecuencia en la teoría geométrica de funciones y conviene analizarlo y recordarlo. Sea $g(z) = f(z) - b$. Entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) = 0$ y g no es idénticamente nula, puesto que $f \not\equiv b$. Sea m el orden del cero $z = a$ de la función g (de los apuntes sobre los ceros, sabemos que es un número natural). Por el Principio de los ceros aislados, existe un disco abierto centrado en a que no contiene otros ceros de g aparte de a. Reduciendo su radio si fuese necesario, obtenemos un $r > 0$ tal que $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(a;r) \setminus \{a\}$. Enseguida veremos por qué nos interesa tener un disco cerrado contenido en Ω en lugar de un disco abierto. Lo que sigue también forma parte del razonamiento típico al que aludimos.

Consideremos la circunferencia $C = \{z : |z - a| = r\}$, el borde del disco fijado. Sea $\delta = \text{mín}\{|g(z)| : z \in C\}$. El mínimo se alcanza al ser $|g|$ una función continua en Ω y $C \subset \Omega$ un conjunto compacto. Además, $\delta > 0$ porque la función $|g|$ no se anula en la circunferencia C (por eso necesitabamos un disco cerrado). Veremos a continuación que el número δ fijado es el δ que buscamos desde el comienzo de la prueba, demostrando que $D(b;\delta) \subset f(\Omega)$.

Basta ver que, para todo $w \in D(b;\delta)$ se tiene $w \in f(\Omega)$. Sea $w \in D(b;\delta)$ arbitrario; entonces $|w - b| < \delta$. Ahora viene un truco muy típico: para todo $z \in C$ obtenemos

$$|g(z)| \geq \delta > |w - b| = |(f(z) - b) - (f(z) - w)| = |g(z) - (f(z) - w)|.$$

Acabamos de ver que en la curva C, una función holomorfa g tiene módulo estrictamente más grande que otra, $g - (f - w)$. Por el Teorema de Rouché, en el interior de C, que es el disco abierto $D(a;\delta)$, la función más grande, g, tiene el mismo número de ceros que la diferencia de las dos: $g - [g - (f - w)] = f - w$. Pero la función g tiene, por lo menos, m ceros allí (teniendo en cuenta las multiplicidades), siendo $m \geq 1$. Por tanto, $f(z) - w$ tiene en el mismo disco, al menos, un cero, lo cual quiere decir que $w = f(z)$ para, al menos un punto $z \in D(a;\delta)$. Y eso significa que $w \in f(\Omega)$. El teorema queda demostrado. ■

Observación. Un razonamiento muy análogo al que acabamos de ver en la demostración del Teorema 7 se usa para probar, por ejemplo, que si una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva en Ω, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Y también para probar un recíproco parcial: si $f'(z) \neq 0$ para un punto $z \in \Omega$, entonces f es inyectiva en un entorno abierto del punto z. Estos resultados se podrán ver en el curso optativo de Variable Compleja II.

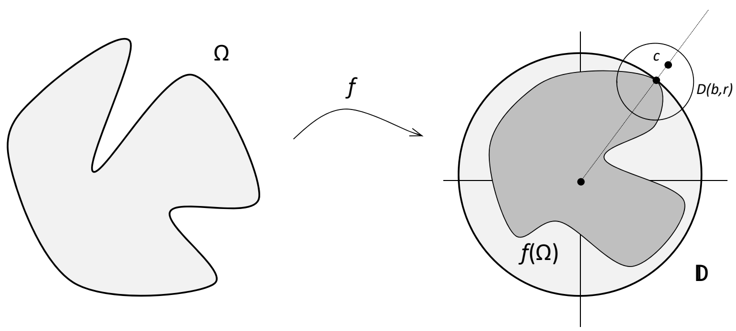
Ejercicio 9. *Explique razonadamente por qué, si f es holomorfa en un dominio $\Omega \neq \emptyset$, es imposible que $f(\Omega) = \mathbb{R}$ o que $f(\Omega) = \overline{\Omega}$ (cuando $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$).*

SOLUCIÓN. □ El conjunto $\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{C}$ ya ningún disco puede estar contenido en $\mathbb{R}$. Según el Teorema de la aplicación abierta, sabemos que o bien f es abierta, en cuyo caso $f(\Omega)$ es abierto y no puede ser $\mathbb{R}$, o bien es constante, en cuyo caso $f(\Omega)$ es un conjunto que consiste en un único punto y tampoco puede ser $= \mathbb{R}$.
El razonamiento es análogo para $\overline{\Omega}$: es un conjunto cerrado. Los únicos subconjuntos de $\mathbb{C}$ que son abiertos y cerrados a la vez son el $\emptyset$ y $\mathbb{C}$; al ser $\overline{\Omega}$ distinto de ambos, no puede ser abierto. Luego, por el Teorema de la aplicación abierta, $f(\Omega) \neq \overline{\Omega}$, salvo que f sea constante: $f \equiv c$, pero en ese caso obtenemos $f(\Omega) = \{c\} \neq \overline{\Omega}$ (nótese que Ω contiene un disco). ■

En los enunciados de varios teoremas aparecen ciertas desigualdades (acotaciones) para las funciones analíticas consideradas. En unos textos esas desigualdades se escriben como estrictas y en otros no. El siguiente ejercicio nos explica por qué es irrelevante cómo se escriben (siempre y cuando f no sea constante, que suele ser un caso trivial).

Ejercicio 10. *Dar una solución alternativa del Ejercicio 3, usando el Teorema 7.*

SOLUCIÓN. ☐



Supongamos que $|f(a)| = 1$ para cierto $a \in \Omega$. Sea $b = f(a)$. Puesto que f no es constante, es una aplicación abierta y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto. Dado que $b \in f(\Omega)$, existe un radio $r > 0$ tal que el disco abierto $D(b; r) = \{z : |w - b| < r\}$ está contenido en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $|b| = 1$, es obvio que el disco $D(b; r)$ contiene un punto c tal que $|c| > 1$; por ejemplo, podemos tomar $c = (1 + \frac{r}{2|b|})b$ ya que $|b - c| = \frac{r}{2} < r$. Pero $c \in D(b; r) \subset f(\Omega)$ así que $c = f(z)$ para cierto $z \in \Omega$ y $|f(z)| = |c| = |b| + \frac{r}{2} = 1 + \frac{r}{2} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, concluimos que $|f(z)| < 1$ para todo z en Ω. ■

El razonamiento que acabamos de ver en el Ejercicio 10 es, esencialmente, el procedimiento que se usa para demostrar el Principio del módulo máximo de forma alternativa.

Ejercicio 11 *Demostrar el Principio del módulo máximo, usando el teorema de la aplicación abierta.*

SOLUCIÓN. ☐ Una vez visto el Ejercicio 10, la demostración es inmediata. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$, entonces la función $g = f/M$ cumple las condiciones del ejercicio mencionado. Por tanto, si g (o, equivalentemente, f) no es constante, se cumple, de hecho, $|g(z)| < 1$, es decir, $|f(z)| < M$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, $|f|$ no alcanza su máximo en Ω, salvo que sea constante. ■

Propina: Detalles adicionales

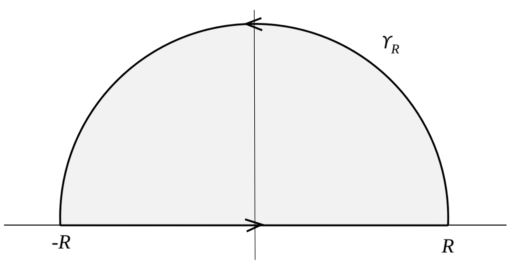
Estos detalles adicionales están pensados para aquellos estudiantes que deseen cursar Variable Compleja II en un futuro. Pueden omitirse en una primera lectura (o por completo) y no entrarán en el temario de los exámenes de 2022-23.

Propina: Uso del principio del argumento en ejercicios. Las aplicaciones del Principio del argumento en problemas suelen ser técnicamente algo más complicadas que las de otros teoremas que veremos a continuación y por eso no están recogidas en los problemas de la hoja correspondiente. No obstante, incluiremos un ejercicio típico (que se puede omitir en una primera lectura).

Ejercicio 12.* *Demuestre que el polinomio* $p(z) = z^4 + iz + 1$ *tiene exactamente dos ceros en el semiplano superior* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

SOLUCIÓN. □ Aplicaremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio "suficientemente grande" y contenido en el semiplano superior. (Otros métodos de solución son posibles.)

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo.



Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R, R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\operatorname{Re} p(x) \geq 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (sólo tiene una "pequeña" variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir $p(z) = z^4 \left(1 + \dfrac{i}{z^3} + \dfrac{1}{z^4}\right)$.

Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = R\,e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, con lo cual $z^4 = R^4\,e^{4it}$ y $0 \leq 4t \leq 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos. ■

Ejercicio 13 *Demuestre que el polinomio* $p(z) = z^4 + iz + 1$ *tiene exactamente dos ceros:*

(a) en el semiplano derecho $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

(b) en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

SOLUCIÓN. Antes que nada, observemos que, al ser p un polinomio de grado 4, tiene que tener exactamente cuatro soluciones complejas, teniendo en cuenta las posibles multiplicidades. Ninguno de esos ceros puede ser real ya que para un número real x la igualdad $p(x) = 0$ implicaría $x^4 + 1 = 0$ (igualando las partes real e imaginaria a cero), lo cual es imposible.

(a) Este apartado admite una solución elemental, debido a sus carácterísticas particulares. En general, dado que p no tiene todos los coeficientes reales, de ninguna manera se sigue que si z_0 es una raíz, entonces $\overline{z}_0$ también lo es. No obstante, es fácil observar que si z_0 es una raíz, entonces $-\overline{z}_0$ es otra. En efecto, si $p(z_0) = 0$, conjugando la ecuación, obtenemos

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{z}_0^4 - i\overline{z}_0 + 1 = \overline{(-z_0)}^4 + i\cdot(\overline{-z}_0) + 1 = p(-\overline{z}_0)\,.$$

Geométricamente, es fácil ver que si z_0 está en el semiplano derecho, entonces $-\overline{z}_0$ está en el izquierdo y viceversa. Por tanto, el número de ceros en el semiplano izquierdo es igual al número de ceros en el semiplano derecho. Como en total hay 4 y también es fácil comprobar que p no tiene ceros en el eje imaginario, tiene que haber exactamente dos ceros de p en el semiplano derecho y otros dos en el izquierdo.

(b) Seguiremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio "suficientemente grande" y contenido en el semiplano superior. (Otros métodos de solución son posibles.)

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R,R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo. Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R,R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\operatorname{Re} p(x) \ge 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (tiene una "pequeña" variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir $p(z) = z^4(1 + \dfrac{i}{z^3} + \dfrac{1}{z^4})$.

Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = R\,e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, con lo cual $z^4 = R^4\,e^{4it}$ y $0 \le 4t \le 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos.

Automorfismos del disco. Este año no podremos cubrir el tema de las aplicaciones conformes en su integridad pero, al menos, veremos unos elementos mínimos a través del estudio de los automorfismos del disco. Dado un dominio Ω en el plano y una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, diremos que f es un automorfismo de Ω si f es, además, una función biyectiva.

En Variable Compleja es posible carácterizar todos los automorfismos de ciertos dominios planos. El caso más básico es el de los automorfismos del disco. Ya hemos desarrollado suficientes herramientas para ocuparnos de este caso. Empezaremos con algunos ejemplos, uno obvio y el otro conocido de la primera hoja de problemas de este curso (aunque el enunciado no se llegó a formular en estos términos).

Ejemplo 1. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. La rotación R_λ, definida en el disco unidad $\mathbb{D}$ como $R_\lambda(z) = \lambda z$, es un automorfismo de $\mathbb{D}$: obviamente, es holomorfa en el disco y es fácil comprobar que es tanto inyectiva como suprayectiva: por ejemplo, dado w con $|w| < 1$, existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $R_\lambda(z) = w$, a saber, $z = \overline{\lambda} w$ (recordemos que $1 = |\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda}$), lo cual muestra que es sobreyectiva.*

Ejercicio 14. *Sea $a \in \mathbb{D}$ y definamos la función φ_a en $\mathbb{D}$ como $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Entonces φ_a es un automorfismo de $\mathbb{D}$. Además, φ_a tiene las siguientes propiedades: $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$ (intercambia el origen y el punto a, es una involución: $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Además,*

$$\varphi_a'(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, \qquad \varphi_a'(a) = -\frac{1}{1-|a|^2}. \tag{2}$$

SOLUCIÓN. ☐ Veamos primero que $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Debido a la cancelación del término $2\mathrm{Re}\{\overline{a}z\}$, tenemos que

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = 1-\frac{|a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{|1-\overline{a}z|^2-|a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1+|az|^2-|a|^2-|z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

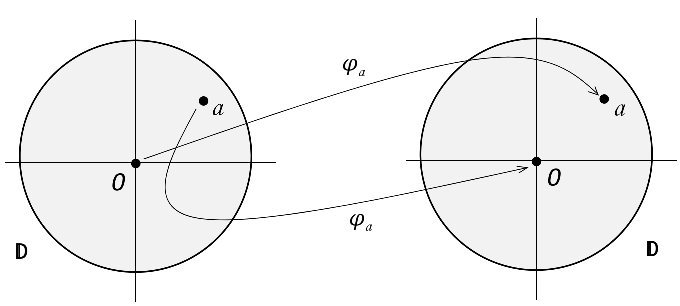
Dado que el denominador es positivo y $1-|a|^2 > 0$, se sigue que

$$|\varphi_a(z)| < 1 \iff 1-|\varphi_a(z)|^2 > 0 \iff 1-|z|^2 > 0 \iff |z| < 1.$$

Esto nos dice que $\varphi_a(z) \in \mathbb{D}$ si y sólo si $z \in \mathbb{D}$; en particular, $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Puede comprobarse directamente que $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$. Es decir, φ_a es su propia inversa o lo que llamamos una *involución*. Por tanto, para cada $w \in \mathbb{D}$, el punto $\varphi_a(w) \in \mathbb{D}$ es su preimagen por φ_a, así que φ_a es suprayectiva: $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
Sabiendo que φ_a es una involución, es fácil ver que φ_a es inyectiva porque de la condición $\varphi_a(z) = \varphi_a(w)$ se sigue que

$$z = \varphi_a(\varphi_a(z)) = \varphi_a(\varphi_a(w)) = w.$$

Por supuesto, esto se puede comprobar también directamente. Lo dejamos como ejercicio fácil.
Las fórmulas (2) para la derivada se comprueban de forma rutinaria. ■



Observación. Es fácil ver que la composición de dos automorfismos es un automorfismo (de hecho, puede verse que los automorfismos forman un grupo respecto a la operación de composición). Por lo expuesto, toda transformación de la forma

$$f(z) = \lambda \varphi_a(z) = (R_\lambda \circ \varphi_a)(z), \quad |a| < 1, \quad |\lambda| = 1, \tag{3}$$

es un automorfismo del disco. Dejamos como un ejercicio fácil comprobar que la composición en el orden inverso, $\varphi_a \circ R_\lambda$ también tiene la misma forma, $R_\mu \circ \varphi_b$, para ciertos μ con $|\mu| = 1$ y $b \in \mathbb{D}$ convenientemente elegidos. Ahora veremos que no existe ningún otro tipo de automorfismo del disco.

Teorema 8. *Todo automorfismo del disco unidad* $\mathbb{D}$ *es de la forma* (3) *para ciertos* a *y* λ *con* $|\lambda| = 1$ *y* $|a| < 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea f un automorfismo de $\mathbb{D}$. Para demostrar que tiene la forma que se afirma en el teorema, buscamos el único cero posible de f. Puesto que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es sobreyectiva, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$. Consideremos la composición $g = f \circ \varphi_a$. (Esta técnica es muy común y conviene tenerla en cuenta para sus aplicaciones en diversos ejercicios donde se “mueven” los puntos en el disco de forma conveniente.) Entonces $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y, además, $g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0$. Por tanto, g cumple las condiciones del Lema de Schwarz. Por tanto, $|g'(0)| \le 1$.

Puesto que g es un automorfismo del disco, es inmediato que su función inversa $h = g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ también lo es. Es claro que h es biyectiva pero ¿por qué es holomorfa en $\mathbb{D}$? Porque así nos lo dice el Teorema de la aplicación inversa visto antes (y, para poder aplicarlo, necesitamos otro teorema no visto pero mencionado en estos apuntes: la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula). Puesto que $h(0) = 0$, aplicando de nuevo el Lema de Schwarz se sigue que $|h'(0)| \le 1$. Por el Teorema de la aplicación inversa,

$$1 \ge |h'(0)| = \left| \frac{1}{g'(0)} \right|,$$

luego $|g'(0)| = 1$, así que se cumple la igualdad en Schwarz. Por tanto, g es una rotación: $g(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, $f(\varphi_a(z)) = \lambda z$. Puesto que φ_a es una involución, aplicando la última fórmula a $\varphi_a(z)$ en lugar de z, obtenemos

$$f(z) = f(\varphi_a(\varphi_a(z))) = \lambda \varphi_a(z). \qquad \blacksquare$$

Preparado por Dragan Vukotić, UAM
Dibujos: José Pedro Moreno