Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Consecuencias de la fórmula integral de Cauchy para circunferencias

Uno de los teoremas centrales en Variable Compleja es la fórmula integral de Cauchy, que nos permite calcular el valor de una función holomorfa (o de sus derivadas) en el interior de un contorno (curva cerrada, simple y suave a trozos) a partir de los valores que toma la función en el contorno. Este resultado nos ayudará a calcular numerosas integrales, incluidas varias integrales impropias vistas en otros cursos y que podrían ser complicadas de evaluar por métodos elementales. También nos permitirá deducir numerosos teoremas cualitativos acerca del comportamiento de las funciones holomorfas que serán de nuevo unos fenómenos típicos de variable compleja, sin análogos en otros contextos en Análisis matemático.

Incluso la versión más simple de la fórmula integral de Cauchy, formulada para las circunferencias, nos bastará en esta entrega de apuntes para deducir un resultado fundamental que ya anticipamos en clase: toda función holomorfa es analítica. Dicho de manera más precisa, una función holomorfa puede escribirse como serie de potencias en cada disco contenido en el dominio donde la función es holomorfa. Una vez fijado el centro, veremos que esa serie (de Taylor) es única. Esto tendrá varias consecuencias importantes como las llamadas estimaciones de Cauchy para las funciones enteras, de las que es un caso especial el teorema de Liouville. Dichas estimaciones nos ayudan a entender mejor cómo crecen las funciones enteras y qué imágenes pueden tener.

Holomorfía y analiticidad son conceptos equivalentes. Serie de Taylor

Empezaremos por algunos hechos básicos de carácter geométrico.

Observaciones sobre los discos contenidos en un dominio. Recordemos que un dominio es un conjunto abierto y conexo en el plano. Algunas de las letras más habituales para denotar un dominio son Ω y D. Un teorema visto en clase afirma que cada dominio en el plano es conexo por líneas poligonales con todos los lados paralelos a alguno de los ejes (es decir, todos horizontales o verticales).

En este capítulo debemos tener presentes algunas consideraciones métrico-geométricas muy sencillas que detallamos a continuación. Recordemos que la distancia de un punto z a un conjunto A en el plano se define como

$$\operatorname{dist}(z,A)=\operatorname{ínf}\{|z-w|\,:\,w\in A\}\,.$$

Obviamente, el valor de $\operatorname{dist}(z,A)$ es no negativo. Si $A=\emptyset$, entendemos que $\operatorname{dist}(z,A)=+\infty$. Si $A\neq\emptyset$, entonces la distancia es finita: si $w_0\in A$, entonces $\operatorname{dist}(z,A)\le|z-w_0|$, por la definición del ínfimo.

Proposición 1. *Si $A\neq\emptyset$ es un conjunto cerrado, el ínfimo* $\operatorname{dist}(z,A)$ *se alcanza para todo $z\in\mathbb{C}$:*

$$\operatorname{dist}(z,A)=\operatorname{mín}\{|z-w|\,:\,w\in A\}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Primero, de la definición del ínfimo se deduce que existe una sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que la sucesión numérica $(|z-w_n|)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A)$. De ahí se sigue que la sucesión compleja $(z-w_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada y, por la desigualdad triangular, también lo es $(w_n)_{n=1}^{\infty}$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto w cuando $k\to\infty$. Puesto que A es cerrado, por hipótesis, $w\in A$. Entonces

$$|z-w| = \lim_{k\to\infty}|z-w_{n_k}| = \lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A)\,,$$

así que el ínfimo se alcanza, al menos, en el punto $w\in A$. (Podría alcanzarse en varios puntos; conviene buscar ejemplos concretos.) ■

Proposición 2. *Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un dominio no vacío, $z\in\Omega$ y $r>0$. Entonces el disco abierto $D(z;r)\subset\Omega$ si y sólo si $r\le\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$. Por tanto, el disco abierto más grande centrado en z y contenido en Ω es $D(c;R)$, donde $R=\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Cuando $\Omega=\mathbb{C}$, entonces $\partial\Omega=\emptyset$ y $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)=+\infty$, así que no hay nada que demostrar (para todo radio $r>0$ y finito, $D(z;r)\subset\Omega$ mientras que, formalmente, entendemos que $D(z;+\infty)=\mathbb{C}$).

Cuando $\Omega\ne\emptyset$ es un dominio distinto del plano, su borde (frontera) $\partial\Omega$ es un conjunto cerrado y no vacío. Por tanto, $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es un número finito y se alcanza, según la Proposición 1. Además, el número $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es estrictamente positivo porque Ω, por ser abierto, contiene un disco centrado en z y de radio positivo, digamos δ, luego $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)\ge\delta>0$). Es inmediato que, para $R=\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$, $D(z;R)\subset\Omega$ y, por tanto, para todo r con $0<r\le R$ tenemos que $D(z;r)\subset\Omega$, mientras que, para $\rho>R$, es imposible que $D(z;\rho)\subset\Omega$, por la definición de la distancia. ■

A estas alturas ya debería ser obvio que, dado un punto z en un dominio Ω, una cirfunferencia centrada en z y de radio $r>0$ está contenida en Ω (equivalentemente, $\overline{D}(c;r)=\{z:|z-c|\le r\}\subset\Omega$) si y sólo si $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)>r$.

La Proposición 2 será importante a la hora de desarrollar una función holomorfa en serie en ciertos discos en un dominio.

Holomorfía implica analiticidad. Recordemos que una función f es holomorfa en un dominio Ω si tiene derivada $f'(z)$ en todos los puntos z de Ω. Seguiremos usando la notación $f\in\mathscr{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en Ω.

Como es habitual en Análisis Matemático, una función se denomina analítica en Ω si en cada disco $D(c,r)$ contenido en Ω se puede escribir como serie de potencias: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$; en este caso, se trata de una serie compleja. Recordemos que, debido a la Proposición 2, se cumple que $D(c,r)\subset\Omega$ si y sólo si $r\le\operatorname{dist}(c,\partial\Omega)$. Sabemos de antes que una serie de potencias se puede derivar tantas veces cuantas se quiera, obteniendo cada vez otra serie de potencias convergente en el mismo disco. Por lo tanto, toda función analítica en un disco es también holomorfa en el mismo disco.

Aparentemente, la propiedad de ser analítica es mucho más fuerte que la propiedad de ser holomorfa. No obstante, ahora ya hemos llegado a uno de los puntos centrales de este curso donde veremos que toda función holomorfa en Ω es, de hecho, analítica en cualquier disco contenido en Ω. Por lo tanto, los dos conceptos, analítica y holomorfa, son equivalentes, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $c \in \Omega$ y $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega) = R$. Entonces f es puede escribir como función analítica en el disco $D(c;R)$. En otras palabras, puede desarrollarse en serie de potencias centrada en c y convergente en $D(c;R)$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n ,$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw$$

para cualquier valor de r con $0 < r < R$ y C_r la circunferencia centrada en c, de radio r y con orientación positiva (por ejemplo, parametrizada como $C_r(t) = c + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$).

En particular, una función holomorfa tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de Ω, siendo

$$f^{(n)}(c) = n!\, a_n , \qquad \forall c \in \Omega, \quad \forall n \ge 0 .$$

Además, se tiene la siguiente fórmula integral de Cauchy para la derivada n-ésima de la función f en el punto $z = c$:

$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw , \qquad \forall n \ge 0 . \tag{1}$$

Definición. Es habitual llamar a la serie obtenida en el Teorema 1 la serie de Taylor de la función f centrada en el punto c.

DEMOSTRACIÓN. □ Elijamos un valor arbitrario de r tal que $0 < r < R$. Entonces $\overline{D}(c;r) \subset D(c;R) \subset \Omega$. Por la fórmula integral de Cauchy (versión simple para circunferencias y puntos interiores arbitrarios), sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

para todo $z \in D(c;r)$. Consideremos ahora un valor arbitrario pero fijo ρ tal que $0 < \rho < r$. Veamos que ocurre cuando $|z-c| \le \rho$. Puesto que entonces $|z-c| \le \rho < r = |w-c|$ para todo $w \in C_r$, obtenemos que

$$\left| \frac{z-c}{w-c} \right| \le \frac{\rho}{|w-c|} = \frac{\rho}{r} < 1$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-c)-(z-c)} = \frac{1}{w-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}} = \frac{1}{w-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{w-c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}} .$$

La serie converge uniformemente en $\overline{D}(c;\rho)$, al ser geométrica con $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| \le \frac{\rho}{r} < 1$. Finalmente, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw \cdot (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n ,$$

para todo $z \in \overline{D}(c;\rho)$, siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw .$$

El intercambio de la integral y la serie está justificado por el último corolario de los apuntes sobre las integrales de línea complejas, debido a la convergencia uniforme en C_r.

El desarrollo de f obtenido es válido para $|z-c| \le \rho$ con $\rho < r$ y, por tanto, tenemos convergencia absoluta de la serie de potencias en todo el disco $D(c;r)$. Puesto que esto es cierto para todos los valores r y ρ tales que $0 < \rho < r < R$, la serie de potencias obtenida converge en todo $D(c;R)$ (y, naturalmente, uniformemente en todos los subconjuntos compactos de este disco). Por supuesto, la fórmula para a_n sólo tiene sentido cuando $0 < r < R$.

Es importante observar que a_n no depende de z ya que esta variable no interviene en la integral que nos da el valor de a_n. Por el teorema de una entrega anterior de apuntes que nos dice que una serie de potencias se puede derivar término a término, sabemos que, de hecho, $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y, por tanto, para un $c \in \Omega$ dado, el coeficiente a_n es único para cada $n \ge 0$. ■

Observaciones. (1) Es evidente que si se tiene desarrollo en serie de potencias de radio R como en el teorema, el mismo desarrollo es válido en cualquier disco de menor radio y centrado en el mismo punto.

(2) Tal y como nos muestra el Teorema 1, debido a la fórmula $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, los coeficientes de la serie de Taylor (con el centro c prescrito) de una función analítica f son únicos. Usaremos este hecho con frecuencia para sacar conclusiones adicionales. Lo ilustramos mediante varios ejemplos.

(3) Según el resultado anterior, la derivada de una función holomorfa f de cualquier orden, $f^{(n)}$ es, a su vez, derivable y, por tanto, es continua. Es una observación que vamos a usar varias veces en lo que queda del curso.

(4) Nótese que, para demostrar el Teorema 1, sólo hemos usado la versión especial de la fórmula integral de Cauchy para circunferencias que, a su vez, se basaba en la existencia de la primitiva y en el teorema integral de Cauchy en dominios convexos. En otras palabras, no hemos necesitado ninguna de las versiones más generales de esos teoremas que se mencionarán en esta entrega de apuntes.

(5) A partir de ahora, usaremos los términos función holomorfa y función analítica indistintamente, puesto que la equivalencia entre estos conceptos ha quedado justificada.

Corolario 1. *Si Ω es un dominio en el plano y función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene función primitiva en Ω, entonces f es holomorfa en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. □ Si existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$ en Ω, entonces F es $\mathbb{C}$-diferenciable infinitas veces según el Teorema 1. En particular, existe F'' y $F'' = f'$; por tanto, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. ■

Desarrollo en serie de Taylor. El desarrollo, obviamente, depende del centro c de la serie. Por ejemplo, ya sabemos que la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ puede escribirse como serie geométrica: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, convergente para $|z| < 1$. Es la serie de Taylor de f centrada en el origen: $c = 0$. (Se recomienda calcular las derivadas para comprobar que, efectivamente, en este caso $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$ para todo $n \ge 0$.) Es claro que f es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. La distancia del punto $c = 0$ al borde de Ω, que es $\partial\Omega = \{1\}$, es igual a uno y el disco más grande centrado en el origen y contenido en Ω es precisamente el disco unidad $\mathbb{D} = D(0;1) = \{z : |z| < 1\}$. La situación cambia si cambiamos de centro.

Ejercicio 1. *Desarrolle la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en serie de potencias centrada en $c = -1$, indicando el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. Usando de nuevo una serie geométrica, obtenemos

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}\,.$$

Este desarrollo de Taylor es convergente para $|z+1|<2$.

En una entrega anterior de los apuntes hemos definido la función logarítmica $f(z)=\log(1+z)$ en un dominio adecuado y hemos calculado su derivada. A continuación veremos su desarrollo de Taylor centrado en $c=0$.

Ejercicio 2. *Desarrolle en serie de potencias centrada en el origen la función $f(z)=\log(1+z)$, indicando el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. $\square$ Para poder definir la función logaritmo como función holomorfa (analítica), necesitamos hacer un corte en el plano, excluyendo, por ejemplo, los valores reales no positivos. Por tanto, se ha de cumplir la condición $1+z\neq t$, para todo $t\in\mathbb{R}$, $t\le 0$, lo cual es equivalente a $z\neq x$, $x\le -1$. (Elegiremos la determinación principal de manera que $\log 1=0$.) Por tanto, tomamos como dominio de definición

$$\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z=x\in\mathbb{R}: x\le -1\}\,,$$

el plano menos el semieje $(-\infty,-1]$ del eje real. El disco más grande centrado en el origen contenido en Ω es, obviamente, el disco unidad, ya que la distancia del origen al borde de Ω es uno. Por tanto, podemos desarrollar f en serie de potencias de z (serie de Taylor) convergente en el disco unidad. Calculamos ahora los coeficientes de la serie de Taylor, calculando las sucesivas derivadas de f:

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}\,,\quad f''(z)=-\frac{1}{(1+z)^2}\,,\quad f'''(z)=\frac{2}{(1+z)^3}\,,\quad f^{(4)}(z)=-\frac{3!}{(1+z)^4}\,,\quad\ldots$$

Inductivamente, obtenemos la fórmula

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n}\,,\qquad n\ge 1\,.$$

Por tanto,

$$f(0)=0\,,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,,\quad \text{para }\; n\ge 1\,,$$

así que los coeficientes de Taylor son:

$$a_0=0\,,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,,\qquad n\ge 1\,,$$

y el desarrollo en serie (que generaliza la fórmula conocida de Cálculo I para valores reales) es

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$$

Como ya comentamos anteriormente, el disco de convergencia de la serie obtenida es precisamente el disco unidad: $\{z:|z|<1\}$. $\blacksquare$

Unicidad de los coeficientes de Taylor. Ecuaciones funcionales. La unicidad del desarrollo en serie de Taylor también nos ayuda a determinar las funciones analíticas en ciertos discos (o en todo el plano) que cumplen determinadas condiciones, es decir, las que son soluciones de cierta ecuación funcional. Con *ecuación funcional* nos referimos a una ecuación en la que la incógnita no es la variable independiente (x, z u otra) sino la función que figura en ella; por ejemplo, $f(x)+f(y)=f(x+y)$, para todo x, $y\in\mathbb{R}$ o $f(2z)=2f(z)$, para todo $z\in\mathbb{C}$, suponiendo ciertas condiciones sobre f (por ejemplo, f continua en $\mathbb{R}$, en el primer caso, o f entera, en el segundo caso).

A continuación, veremos un par de ejemplos. Es importante dominar las técnicas empleadas en sus soluciones, puesto que tanto en las hojas de problemas como en los exámenes de los años anteriores, encontraremos varios problemas de este tipo.

Ejercicio 3. *Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la ecuación funcional*

$$f(2z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2},\qquad \forall z\in\mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. □ Por el teorema que dice que la holomorfía implica la analiticidad, sabemos que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

donde la serie de potencias es convergente en todo el plano. Si f cumple la ecuación indicada, entonces (por una proposición vista antes sobre la suma de dos series de potencias)

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^na_nz^n=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nz^n}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\,a_nz^n$$

para todo $z\in\mathbb{C}$. Por la unicidad de los coeficientes de Taylor, se sigue que para todo $n\geq 0$ tenemos

$$2^na_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\,a_n.$$

Por tanto, si algún $a_n\neq 0$, se obtiene

$$2^n=\frac{1+(-1)^n}{2},$$

pero esto es imposible cuando $n\geq 1$ ya que entonces

$$\frac{1+(-1)^n}{2}\leq\frac{1+1}{2}<2\leq 2^n.$$

Se sigue que $a_n=0$ para todo $n\geq 1$, así que sólo el coeficiente a_0 puede ser no nulo, lo cual implica que $f\equiv cte$.
Es fácil comprobar que toda función constante efectivamente cumple la ecuación dada. Por tanto, las constantes son las únicas soluciones. ■

El desarrollo en serie de Taylor nos permite resolver ecuaciones funcionales también para otras funciones que no sean enteras.

Ejercicio 4. *Halle todas las funciones $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. $\square$ Puesto que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, podemos escribir f como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

La condición $f(z) = f(z^2)$ nos dice que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + + a_5 z^5 + a_6 z^6 + \ldots = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + + a_3 z^6 + a_4 z^8 + \ldots$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la serie de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados de la última igualdad, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0 , \qquad a_2 = a_1 , \; a_4 = a_2 , \; a_6 = a_3 , \; a_8 = a_4 , \ldots$$

y, por tanto, $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$, luego $f \equiv cte$.
Recíprocamente, es evidente que todas las funciones constantes son analíticas en el disco unidad y que todas satisfacen la condición exigida $f(z) = f(z^2)$. $\blacksquare$

Más adelante, veremos que este ejercicio admite una solución alternativa (basada en el Principio de los ceros aislados).

Fórmula integral de Cauchy para las derivadas y versiones más generales

Fórmula integral de Cauchy para las derivads. El Teorema 1 nos permite recuperar el valor de la derivada de cualquier orden en el centro de una circunferencia a partir de los valores de la función en dicha circunferencia. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 5. *Si γ denota a la circunferencia unidad con orientación positiva, calcule la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} \, dz .$$

SOLUCIÓN. $\square$ No podemos aplicar directamente la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ y al cociente $\frac{f(z)}{z}$ en ningún disco que contenga al disco unidad cerrado. El problema está en que el punto $c = 0$ pertenece al interior de la circunferencia γ pero f no es holomorfa en $c = 0$.
Sin embargo, podemos usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada (fórmula (1)), aplicada a la función $g(z) = \cos z$, que sí es holomorfa en todo el plano:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z^2} \, dz = g'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 ,$$

siendo $n = 1$ y $a = 0$ en la fórmula para la derivada n-ésima en la fórmula integral de Cauchy. $\blacksquare$

Es importante entender en relación con los resultados demostrados hasta ahora nos permiten lo siguiente:

- evaluar una función holomorfa en cualquier punto interior a una circunferencia, a partir de sus valores en dicha circunferencia (por la versión básica de la fórmula integral de Cauchy);

- evaluar la derivada (de cualquier orden) de la función, a partir de los mismos datos, pero sólo en el centro de la circunferencia (según la fórmula (1).

No obstante, la fórmula para la derivada se puede extender a los demás puntos interiores a la circunferencia en cuestión aunque demostrar eso exige un esfuerzo adicional. Veremos esta versión más general un poco más adelante. De momento, empezaremos con la propia fórmula integral de Cauchy (para la función, no para sus derivadas) y contornos más generales que una circunferencia.

Aviso importante. En lo que sigue, aceptaremos (sin demostración) que *el teorema integral de Cauchy se sigue cumpliendo en los dominios simplemente conexos, no sólo en los convexos*.

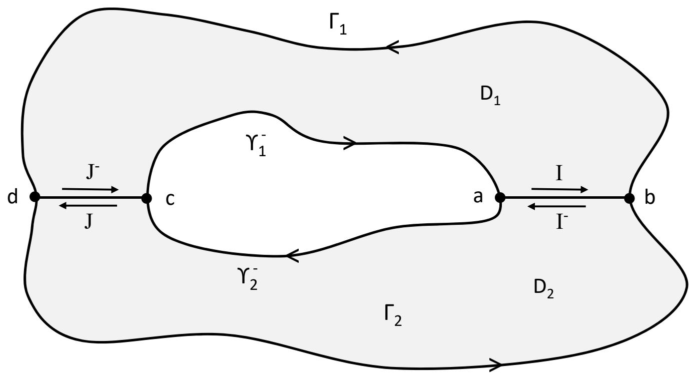
Fórmula integral de Cauchy: versiones más generales. Sea Ω un dominio en el plano acotado por dos contornos, Γ y γ, de manera que la traza de γ esté contenida en el dominio interior a Γ. Tal y como ya hicimos en los cursos de cálculo, orientaremos la frontera $\partial\Omega$ de manera que, al recorrerla en el sentido que dicta su parametrización, el dominio nos quede siempre a la izquierda; eso significa darle al contorno Γ la orientación positiva y a γ, la negativa: γ^-.

Dominios acotados por dos contornos disjuntos. El procedimiento empleado en la demostración del siguiente resultado es bastante frecuente en Análisis complejo y conviene recordarlo.

Proposición 3. *Sean γ y Γ dos contornos tales que $\overline{D_{\text{int}}(\gamma)} = D_{\text{int}}(\gamma) \cup \{\gamma\} \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$ (geométricamente, Γ "rodea" a la curva γ y a su dominio interior) y sea D el dominio acotado por ambas curvas γ y Γ. Sean Γ y γ ambas orientadas positivamente. Si Ω es un dominio tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. No daremos una demostración rigurosa, pero intuitivamente es fácil ver que podemos "cortar D en dos trozos", uniendo un punto de $\{\gamma\}$ con otro en $\{\Gamma\}$ mediante un segmento $I = [a, b]$, $a \in \{\gamma\}$, $b \in \{\Gamma\}$, por ejemplo, eligiendo $a \in \{\gamma\}$ y $b \in \{\Gamma\}$ tal que $|a - b| = \text{dist}(a, \{\Gamma\})$. Con eso se asegurará de que ningún punto interior del intervalo I tiene intersecciones con ninguna de las dos curvas. (Por supuesto, existen otras formas de elegir los segmentos I y J pero la elección indicada aquí es una opción segura.) De manera análoga, podemos unir otro punto en γ con otro en Γ mediante un segmento $J = [c, d]$, $c \in \{\gamma\}$, $d \in \{\Gamma\}$ y de manera que $I \cap J = \emptyset$. En general, los intervalos I y J no están necesariamente contenidos en la misma recta, como parece quedar reflejado en el dibujo (es decir, su posición puede ser más general).



Si denotamos por $I^- = [b,a]$ y $J^- = [d,c]$ a los mismos segmentos pero con orientación opuesta (vistos como curvas recorridas en el sentido contrario) y por Γ_1, Γ_2 a los dos arcos que componen la curva Γ y que unen b con d y por γ_1, γ_2 a los dos arcos que componen la curva γ y que unen a con c, obtendremos dos nuevos contornos:

$$C_1 = I \cup \Gamma_1 \cup J^- \cup \gamma_1^-, \qquad C_2 = I^- \cup \gamma_2 \cup J^- \cup \Gamma_1 .$$

Estos dos contornos, por el Teorema de Jordan (mencionado en apuntes anteriores) acotan dos dominios simplemente conexos, D_1 y D_2, respectivamente. A ambos contornos se les puede aplicar el enunciado del teorema integral de Cauchy para contornos en dominios simplemente conexos, obteniendo

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0 = \int_{C_2} f(z)\,dz .$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 .$$

Escribiendo ambas integrales como sumas de integrales a lo largo de diferentes trozos y observando que las integrales a lo largo de I e I^- se cancelan y lo mismo para J e J^-.

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz ,$$

lo cual implica la conclusión deseada. ■

Fórmula integral de Cauchy: versión general para contornos. Ya hemos demostrado la Fórmula integral de Cauchy para circunferencias. Ahora veremos que el resultado sigue siendo válido para contornos arbitrarios.

Teorema 2 *(Fórmula integral de Cauchy para contornos). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z), \tag{2}$$

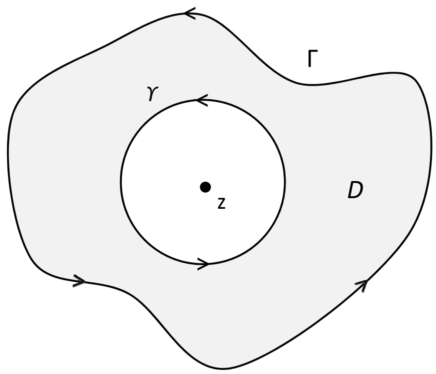
para todo z en el dominio interior a Γ.

Asimismo, se tiene la fórmula para las derivadas de orden n:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw. \tag{3}$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

DEMOSTRACIÓN.



Sea $z \in D_{\text{int}}(\Gamma)$ un punto arbitrario. Entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z;r) \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$. Si llamamos γ a la circunferencia de radio r centrada en z, es inmediato que estamos en condiciones de aplicar la Proposición 3 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)$, que es holomorfa en todos los puntos w del dominio D acotado por las curvas γ y Γ (nótese que $z \notin D$). Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z),$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 3 y la segunda de la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias.

Puesto que antes ya habíamos demostrado la fórmula para las derivadas calculadas *en el centro* de la circunferencia γ, aplicando la Proposición 3 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)^{n+1}$, también obtenemos la fórmula

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = f^{(n)}(z). \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 6. *Sea γ la circunferencia unidad, orientada positivamente. Denotemos por γ^- a la misma circunferencia pero con orientación negativa. Calcule las integrales*

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\,dz.$$

SOLUCIÓN. $\square$ Es fácil ver que

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\, dz = -\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z-(-\frac{1}{3})}\, dz = -2\pi i \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\pi i\,.$$

La primera igualdad es una consecuencia directa de la fórmula para el cambio de orientación vista en los apuntes sobre integrales de línea. La segunda se obtiene aplicando la Fórmula integral de Cauchy al punto $a = -\frac{1}{3}$ situado en el interior de la circunferencia unidad, a la función $f(z) = \cos(\pi z)$, que es holomorfa en todo el plano (entera) y a cualquier dominio que contenga al disco unidad cerrado; por ejemplo, podemos elegir tanto $\Omega = D(0;R)$ con $R > 1$ como $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > -2\}$, entre otros. La tercera igualdad se tiene porque, como ya sabemos, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Para calcular la segunda integral, basta aplicar la fórmula (3) a la segunda derivada:

$$f''(-\frac{1}{3}) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\, dw\,.$$

a la función $f(z) = \cos(\pi z)$, obteniendo

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\, dz = \pi i f''(-\frac{1}{3}) = \pi i(-\pi^2)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^3 i}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejercicio es aparentemente más complicado porque el denominador se anula en dos puntos pero, de hecho, resulta bastante sencillo.

Ejercicio 7. *Para la misma circunferencia γ que en el Ejercicio 6 (con orientación positiva), calcule la integral*

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 3z}\, dz\,.$$

SOLUCIÓN. $\square$ El denominador $z^2 - 3z = z(z-3)$ se anula en dos puntos: en $z = 0$ y en $z = 3$ pero sólo uno de ellos, $z = 0$, está en el dominio interior a la circunferencia γ, que es el disco unidad $\mathbb{D}$. Por tanto, debemos definir $f(z) = \frac{\cos z}{z-3}$ para tener el integrando escrito en una forma conveniente para la aplicación de la Fórmula integral de Cauchy (en este caso, con $c = 0$):

$$\frac{\cos z}{z^2 - 3z} = \frac{f(z)}{z}\,.$$

Para poder aplicar el teorema, necesitamos además un dominio Ω que cumpla dos condiciones a la vez: que f sea holomorfa en Ω (por tanto, $3 \notin \Omega$ será necesario) y que el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \gamma \subset \Omega$. Podemos elegir, por ejemplo, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 2\}$ (por supuesto, hay muchos otros). Por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 3z}\, dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0) = -\frac{2\pi i}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

Índice de una curva respecto de un punto

Sea C la circunferencia de radio r, centrada en el punto z y recorrida en el sentido positivo. Parametrizándola como $w = z + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ y calculando $dw = ire^{it}dt$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = 1\,.$$

Ahora podemos ver que la fórmula sigue siendo válida para cualquier contorno alrededor del punto z. La razón es simple: en el caso particular del Teorema 2 cuando f es la función constante uno, obtenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 2. *Sea Ω un dominio en el plano y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 1\,,$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Esto nos lleva al siguiente punto, del que no veremos muchos detalles. Sea Γ un contorno que encierra una región $D_{\text{int}}(\Gamma)$ y z un punto tal que $z \notin \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} = D_{\text{int}}(\Gamma) \cup \{\Gamma\}$. Puesto que $\text{dist}(z, \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)}) > 0$, existe un dominio Ω tal que $\overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} \subset \Omega$ y $z \notin \Omega$. Por tanto, $f(w) = 1/(w-z)$ es holomorfa como función de la variable w en Ω (puesto que el denominador no se anula). Según el Teorema integral de Cauchy, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0\,.$$

Junto con el Corolario 2, esta observación nos dice que, si $z \notin \{\Gamma\}$ y Γ tiene orientación positiva, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in D_{\text{int}}(\Gamma) \\ 0, & \text{si } z \in D_{\text{ext}}(\Gamma) \end{cases}\,.$$

Obsérvese que, geométricamente, en el primer caso la curva Γ da una vuelta alrededor de z y en el segundo no da ninguna vuelta alrededor de dicho punto. El valor $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw$ se suele llamar el *ìndice* del punto z respecto de la curva Γ. Puede definirse en situaciones mucho más generales, donde no se pide que Γ sea una curva simple. Veamos el resultado pertinente.

Teorema 3. *Sea γ una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple). Entonces para todo $z \notin \{\gamma\}$, el número*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw$$

es entero. Dicho valor es constante en cada una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, siendo igual a 0 en la componente no acotada.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos parametrizar γ de manera que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Puesto que γ es C^1 a trozos, tenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds.$$

Si definimos la función $F : [0,1] \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds,$$

obviamente, se cumple

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw.$$

Además, por el Teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t)-z)e^{-F(t)}\big) = \gamma'(t)e^{-F(t)} - F'(t)(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = \gamma'(t)e^{-F(t)} - \gamma'(t)e^{-F(t)} = 0.$$

Se sigue que la función $(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}$ es constante y, por tanto, por un lado:

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(0)-z)e^{-F(0)} = \gamma(0)-z = \gamma(1)-z$$

(al ser la curva cerrada, se cumple $\gamma(1) = \gamma(0)$) y también

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)}.$$

Se sigue que $(\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)$. Puesto que $z \notin \{\gamma\}$, es imposible que $\gamma(1)-z = 0$, luego $e^{-F(1)} = 1$, así que (¡por fin llegamos a usar esos ejercicios con la exponencial y el logaritmo en una demostración!) $-F(1) = 2\pi i m$, para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Escribiendo $k = -m$, vemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = F(1) = 2\pi i k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y la afirmación principal del resultado queda demostrada.

El conjunto $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ es abierto, al ser la traza $\{\gamma\}$ un compacto, y tiene al menos dos componentes conexas. Una de ellas es no acotada. En esa componente podemos considerar una sucesión de puntos (z_n) tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Aplicando las estimaciones habituales, vemos que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z_n}\, dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1}{|w-z_n|}\, dw \to 0, \quad n \to \infty,$$

ya que la traza $\{\gamma\}$ es compacta y, por tanto, acotada: $|w| \le M$ para todo $w \in \{\gamma\}$, luego $|w - z_n| \ge |z_n| - |w| \ge |z_n| - M \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Puesto que el número $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw$ es constante para todo z en la componente no acotada, se sigue que es igual a cero allí. ■

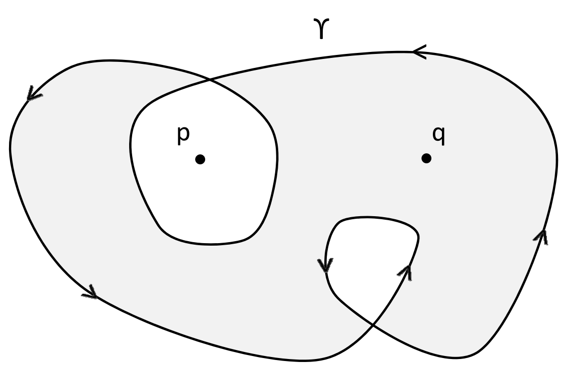
Definición. El índice de una curva γ, cerrada y suave a trozos, respecto de un punto $z \notin \{\gamma\}$ es el número entero

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw\,.$$

Observaciones. (1) Es obvio que el índice es negativo para las curvas simples orientadas negativamente, debido a las propiedades básicas de la integral de línea (al revertir la orientación, se produce un cambio de signo).

(2) El significado geométrico del índice es el número de vueltas que da la curva γ alrededor del punto z. No daremos ninguna justificación formal de este hecho que, por otra parte, es claro de los casos de curvas simples, cerradas y suaves a trozos y también se puede ver si parametrizamos una circunferencia recorrida n veces y calculamos el índice respecto de su centro directamente. Además, sabemos de la segunda parte del enunciado del Teorema 3 que el índice es nulo para todos los puntos en la componente no acotada del complementario de la traza de γ, que son precisamente los puntos alrededor de los cuales γ no da ninguna vuelta ("no los rodea").

Para una curva cerrada y suave a trozos pero no simple, a diferencia de un contorno, no es aplicable el teorema de Jordan. Por ejemplo, en la figura abajo es fácil apreciar que no podemos hablar de un dominio interior y otro exterior a la curva γ representada allí. Basta fijarse en cualquiera de las dos regiones acotadas y en blanco (sin sombrear) que no se pueden considerar ni una cosa ni la otra.



Ejemplo 1. *Para los puntos p y q indicados en la figura de arriba, es obvio que γ da dos vueltas alrededor de p y sólo una alrededor de q. Por tanto,* $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 2$, $\mathrm{Ind}_\gamma(q) = 1$, *lo cual nos dice que*

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-p}\,dw = 4\pi i\,, \qquad \int_\Gamma \frac{1}{w-q}\,dw = 2\pi i\,,$$

sin la necesidad de de conocer la parametrización de γ ni realizar ningún cálculo.

Un recíproco del teorema de Cauchy

Teorema de Morera. Resulta que el recíproco del teorema de Cauchy es cierto, siempre bajo la hipótesis natural de continuidad de las funciones consideradas (que es necesaria para poder integrar a lo largo de los distintos caminos). De hecho, no hace falta exigir que la integral a lo largo de cada contorno sea cero. Basta con pedirlo para los triángulos (o, alternativamente, rectángulos).

Distinguiremos entre los triángulos sólidos T y sus bordes ∂T, a los que simplemente llamaremos triángulos. Dados tres puntos distintos en el plano: a, b y c, el *triángulo* $\partial T = [a,b]+[b,c]+[c,a]$ será la curva cerrada y simple, suave a trozos formada por tres segmentos, orientados de forma natural, mientras que el *triángulo sólido* T será el dominio interior acotado por esta curva más la propia curva.

El teorema que enunciamos a continuación se debe al matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909). Conviene notar que los triángulos en el enunciado se pueden sustituir por rectángulos o por circunferencias, aunque es más fácil trabajar con rectángulos y triángulos.

Teorema 4 *(Morera). Sea Ω un dominio en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo sólido T contenido en Ω se tiene $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Enunciado equivalente: Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo ∂T contenido en Ω se tiene $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos comentado la equivalencia entre los dos enunciados en otros resultados. Aquí se procedería de forma totalmente análoga para verificarla. Para el resto, daremos varias indicaciones.

En primer lugar, la continuidad de f garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier contorno y, en particular, sobre cualquier segmento y triángulo. Para ver que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, basta ver que es holomorfa en cada disco $D(a;R)$ contenido en Ω. En un disco así podemos definir la primitiva de f mediante la fórmula $F(z) = \int_a^z f(w)\,dw = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$, tal y como ya hicimos antes en dominios convexos en general.

La clave de la hipótesis sobre los triángulos consiste en lo siguiente: considerando el triángulo T con los vértices a, z y $z+h$ contenido en $D(a;R)$. Entonces

$$0 = \int_T f(w)\,dw = \int_a^z f(w)\,dw + \int_z^{z+h} f(w)\,dw + \int_{z+h}^a f(w)\,dw = F(z) + \int_z^{z+h} f(w)\,dw - F(z+h),$$

con lo cual obtenemos $\int_z^{z+h} f(w)\,dw = F(z+h) - F(z)$ y podemos razonar como en la demostración del teorema de la existencia de la función primitiva en dominios convexos, aplicando razonamientos completamente análogos, para probar que $F' = f$ en $D(a;R)$. Finalmente, la holomorfía de f en Ω se sigue del Corolario 1. ■

Como acabamos de ver, el Teorema integral de Cauchy no era un simple capricho de los matemáticos del siglo XIX por descubrir nuevas curiosidades. Gracias a los teoremas de Cauchy y de Morera, ahora sabemos que podemos caracterizar las funciones analíticas de entre todas las funciones continuas en un dominio simplemente conexo, como aquellas cuyas integrales sobre todos los triángulos se anulan.

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

Como es habitual, usaremos la notación $[\alpha]$ para denotar la *parte entera* de α, es decir, el único número entero n tal que $n \le \alpha < n+1$. Por ejemplo, $[\pi] = 3$ y $[-\sqrt{3}] = -2$.

Observación. En algunos contextos (por ejemplo, en Informática), la función $a \mapsto [a]$ se suele llamar la *función suelo* y se denota como $\lfloor a \rfloor$.

Antes ya vimos que las funciones enteras como la exponencial y el coseno no están acotadas. Es importante recordar que, aunque $|\cos x| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esta afirmación deja de ser cierta en el cuerpo de los complejos; basta con considerar los valores

$$\cos(-in) = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Veremos ahora que las funciones como la exponencial, el seno y el coseno no son ninguna excepción. Uno de los resultados importantes de este curso, el teorema de Liouville, nos enseñará que si una función entera está acotada, entonces es necesariamente constante. En otras palabras, ninguna función entera (no constante) puede estar acotada. Obtendremos el teorema de Liouville como un caso especial del siguiente resultado, conocido como las estimaciones de Cauchy y relacionado con el crecimiento de los polinomios.

Ya sabemos cómo crece un polinomio cuando $z \to \infty$. Recordémoslo.

Proposición 4. *Sea P un polinomio de grado n. Entonces existen $R > 0$ y $M > 0$ tales que $|P(z)| \le M|z|^n$ para todo z tal que $|z| \ge R$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Se sigue de la desigualdad triangular. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ y $a_n \neq 0$. Tomemos $R = 1$ y

$$C = \text{máx}\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Si $|z| \ge R = 1$, es inmediato que $|z|^n \ge |z|^{n-1} \ge \ldots \ge |z| \ge 1$ y entonces

$$|P(z)| \le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \le C|z|^n + C|z|^n + \ldots + C|z|^n + C|z|^n = (n+1)C|z|^n,$$

así que basta elegir $M = (n+1)C$. ■

Las estimaciones de Cauchy formuladas abajo son, esencialmente, un recíproco de la Proposición 4 pues nos dicen que una función entera no puede crecer de la misma forma que un polinomio sin ser un polinomio. Estas estimaciones son una consecuencia directa de la fórmula integral de Cauchy, aplicada a una función entera.

Teorema 5 *(Estimaciones de Cauchy). Si f es una función entera y existen números $a > 0$, $M > 0$, $R > 0$ tales que $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para todo z con $|z| \ge R > 0$, entonces f es un polinomio de grado, como mucho, $[\alpha]$.*

DEMOSTRACIÓN. ☐ Puesto que f es entera, por el Teorema 1 sabemos que se puede desarrollar en serie de potencias centrada en el origen: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, absolutamente convergente en todo el plano. Además,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

para cualquier $r > 0$. Por hipótesis, $|f(z)| \le M|z|^{\alpha}$ para todo z con $|z| \ge R$. Elijamos $r > R$ y estimemos el valor de $|a_n|$. Teniendo en cuenta que en la circunferencia C_r se tiene $|w| = r > R$, podemos usar la hipótesis sobre el crecimiento de f para estimar el valor de $|f|$ en C_r, aplicando también la estimación para las integrales de línea (Proposición 6 de la anterior entrega de apuntes):

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{C_r} |f(w)|\,|dw| \le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} M r^{\alpha} \ell(C_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{M r^{\alpha}}{r^{n+1}} 2\pi r = M r^{\alpha - n}.$$

Puesto que la misma estimación se obtiene para cualquier $r > R$, tomando el límite cuando $r \to +\infty$, vemos que $M r^{\alpha-n} \to 0$, para cada $n > \alpha$. Por tanto, $a_n = 0$ cuando $n > \alpha$ y la serie de Taylor de f se reduce al polinomio $f(z) = \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n z^n$, QED. ■

Ejercicio 8. *Si f es una función entera que satisface la desigualdad*

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2 + 3}, \quad |z| \ge 1, \tag{4}$$

demuestre que sólo puede ser o una constante, o una función lineal o un polinomio cuadrático.

SOLUCIÓN. ☐ Observando que

$$\frac{|z|^2}{|z|^2 + 3} \le 1$$

para todo z, se sigue que

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2 + 3} \le 3104\,|z|^{2,7}, \quad |z| \ge 1.$$

Por las estimaciones de Cauchy, concluimos que f es un polinomio de grado, como mucho, $[2,7] = 2$. Por tanto, f tiene la forma $f(z) = Az^2 + Bz + C$. ■

El caso $\alpha = 0$ en las estimaciones de Cauchy nos da el siguiente corolario inmediato.

Corolario 3 *(Teorema de Liouville). Toda función entera y acotada es constante.*

Observación. De hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Ejercicio 9. *Identifique todas las funciones enteras que cumplan $|f(z)| < |e^z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

SOLUCIÓN. $\square$ Puesto que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $g \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda e^z$. Además, por la desigualdad para g, se sigue que $|\lambda| < 1$.
Recíprocamente, para toda función de la forma $f(z) = \lambda e^z$ con $|\lambda| < 1$, tomando los módulos, se deduce que cumple la condición $|f(z)| < |e^z|$ para todo z. $\blacksquare$

Ejercicio 10. *Halle todas las funciones enteras con parte real positiva.*

SOLUCIÓN. $\square$ Si f es entera, por la regla de la cadena también lo es e^{-f}. Puesto que $|e^{-f}| = e^{-\operatorname{Re} f} < 1$ y teniendo en cuenta nuestra hipótesis que $\operatorname{Re} f > 0$, concluimos por el Teorema de Liouville que e^{-f} es constante. Además, puesto que la exponencial no se anula, dicha constante debe ser no nula, digamos $e^{-f} \equiv A \neq 0$. Entonces la función $-f$ sólo puede tomar uno de los valores de $\log A$ que son una cantidad infinita numerable; es decir, $-f(z) = \ln A + 2\pi m i$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego (escribiendo $k = -m \in \mathbb{Z}$)

$$f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Cuántos valores distintos de entre estos puede tomar f? Puesto que f es holomorfa, es continua; $\mathbb{C}$ es conexo, luego $f(\mathbb{C})$ es conexo (por un teorema visto en Topología). Se sigue que $f(\mathbb{C})$ no puede contener más de un punto del conjunto $\{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$ y, por tanto, existe un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = -\ln A + 2\pi k_0 i$ para todo z, así que f es una función constante. Además, debe tener parte real positiva: $\operatorname{Re} f = -\ln A > 0$ (y, por tanto, $A < 1$). Es decir, $f(z) = C + 2\pi k_0 i$, con $C > 0$ una constante y $k_0 \in \mathbb{Z}$.
Recíprocamente, si $f(z) \equiv C + 2\pi k_0 i$, para ciertos números $k_0 \in \mathbb{Z}$ y $C > 0$, es obvio que $\operatorname{Re} f > 0$. $\blacksquare$

Acabaremos esta entrega de apuntes demostrando una consecuencia muy importante del teorema de Liouville: el Teorema fundamental del álgebra, que se suele atribuir a Gauss. Lo enunciamos en Conjuntos y Números pero allí no tuvimos suficientes herramientas para probarlo.

El resultado admite varias demostraciones pero cualquier prueba requiere conocimientos de técnicas avanzadas. Algunas demostraciones usan resultados de Análisis y otras de Topología. De hecho, varios matemáticos ya conjeturaban este resultado en el siglo XVII y algunos los más célebres dieron demostraciones erróneas en el siglo XVIII. Una prueba dada por Gauss en 1799 contenía un fallo topológico no trivial, corregido unos 120 años después por Ostrowski. Conviene darse cuenta de que hasta el año 1900 no se habían definido ni siquiera los espacios métricos y mucho menos los topológicos. La primera demostración correcta fue encontrada en 1806 por Argand (cuyo nombre lleva en algunos textos el sistema de coordenadas complejas que usamos en esta asignatura); el mismo Gauss dio dos demostraciones más en la primera mitad del siglo XIX y hasta la fecha se han encontrado numerosas pruebas usando técnicas muy diferentes. La demostración posiblemente más sencilla conocida es la que encontró Charles Fefferman (uno de los ganadores de la Medalla Fields) mientras terminaba sus estudios de grado a finales de los años 1960. Su demostración usa sólo ciertas propiedades analíticas de los polinomios.

Es especialmente llamativa la simplicidad de la demostración que presentamos abajo pero, obviamente, ésta se basa en ciertos conocimientos avanzados que hemos adquirido después de un par de meses de trabajo.

Teorema 6 *(Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio no constante (con coeficientes complejos) tiene, al menos, una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN. □ Sea P un polinomio no constante. Supongamos que no tiene ceros en $\mathbb{C}$. Entonces podemos definir (en todo el plano) la función $f = 1/P$, que es entera por la regla del cociente.

Por un teorema demostrado en clase, $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Entonces, por la definición del límite infinito en el infinito, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > 1$ para todo z con $|z| > R$. Por tanto, $|f(z)| < 1$, para todo z con $|z| > R$. Puesto que f es entera, por el Teorema de Liouville (véase la observación después del teorema) se sigue que f es constante. Luego también P es constante, lo cual es contrario a nuestra hipótesis inicial.

Finalmente, concluimos que P tiene que tener, al menos, un cero en el plano. ■

Preparado por Dragan Vukotić, U.A.M. (Dibujos: José Pedro Moreno, U.A.M.)