Variable Compleja I **(CURSO 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema integral de Cauchy. Función primitiva

El uso de las integrales de línea es fundamental en Variable compleja porque nos permite formular dos de sus teoremas centrales. Uno de ellos es el *teorema integral de Cauchy*, del que existen distintas versiones y según el cual la integral de una función holomorfa a lo largo de una curva cerrada y suave a trozos será igual a cero, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones topológicas relativas a la función y a la curva en cuestión. El otro es la *fórmula integral de Cauchy*, que también admite distintas formulaciones y que nos mostrará cómo calcular el valor de una función holomorfa, dividida por un factor lineal, si conocemos sólo los valores que toma la función holomorfa en una curva cerrada, simple y suave a trozos (lo que solemos llamar un contorno).

Estos dos resultados tienen implicaciones de enorme importancia en el campo de Variable compleja. Por ejemplo, nos ayudarán a calcular numerosas integrales, incluidas varias integrales impropias vistas en otros cursos y que podrían ser complicadas de evaluar por métodos elementales. También nos permitirán deducir numerosos teoremas cualitativos acerca del comportamiento de las funciones holomorfas que serán de nuevo unos fenómenos típicos de variable compleja, sin análogo en otros contextos en Análisis matemático.

Teorema integral de Cauchy y existencia de la primitiva: versiones débiles

Función primitiva y el teorema integral de Cauchy. En esta sección preliminar, veremos que es fácil deducir el teorema integral de Cauchy si añadimos ciertas hipótesis que son, aparentemente, fuertes. Más adelante, veremos que las mismas son redundantes.

Definición. Si $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, diremos que F es una función primitiva de f en Ω.

Proposición 1 *(Teorema integral de Cauchy, suponiendo la existencia de la primitiva). Sea Ω un dominio en el plano, γ una curva cerrada y C^1 a trozos (no necesariamente simple) cuya traza está contenida en Ω y supongamos que f, $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Parametrizando la curva como $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, escribiendo $dz = \gamma'(t)\,dt$, podemos aplicar la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo (adaptado a las funciones complejas de una variable real) para ver directamente que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \big(F(\gamma(t))\big)'\,dt = F(\gamma(t))\Big|_a^b = 0\,.$$

teniendo en cuenta que $\gamma(a) = \gamma(b)$, al tratarse de una curva cerrada. ■

Ejercicio 1. *Sea γ una curva cerrada y C^1 a trozos en el plano (arbitraria). Calcule la integral*

$$\int_\gamma \cos z\, dz.$$

SOLUCIÓN. De las propiedades básicas de las funciones trigonométricas, sabemos que tanto el coseno como el seno son funciones enteras y $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $F(z) = \operatorname{sen} z$ es una función primitiva de $f(z) = \cos z$ en $\Omega = \mathbb{C}$ y podemos aplicar directamente la Proposición 1 para concluir que

$$\int_\gamma \cos z\, dz = 0. \qquad \blacksquare$$

Como se puede ver de la Proposición 1, su demostración resulta trivial incluso para caminos complicados (mientras sean cerrados), si sabemos que una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene en Ω función primitiva. El problema es que aún no sabemos cuándo toda función holomorfa en Ω tiene dicha propiedad. Por tanto, la clave del teorema integral de Cauchy y de sus posibles demostraciones está en la existencia de una función primitiva de una función holomorfa arbitraria en un dominio. Veremos más adelante que esta propiedad es equivalente a una propiedad topológica de Ω: que sea simplemente conexo.

En esta sección, **nuestro objetivo principal es demostrar una versión más general del Teorema 2, eliminando la hipótesis de continuidad de f' (o la hipótesis equivalente de que u, $v \in C^1(\Omega)$).**

En un primer intento, este objetivo se puede conseguir para ciertos contornos especiales. Por ejemplo, si tomamos como $\gamma = \partial R$, la unión de cuatro segmentos que componen el borde de un rectángulo R (donde R incluye su dominio interior), debido a cierta simetría de dicha figura geométrica, podremos demostrar la versión deseada del teorema integral de Cauchy sin hipótesis sobre f'. El siguiente caso especial del teorema integral de Cauchy es famoso, no tanto por su generalidad como por su relevancia histórica y por la belleza de su demostración (que se debe a Goursat) que en su día, indudablemente, debió de ser una revelación. Hoy día ya es una técnica estándar que se suele ver en un curso como el nuestro.

Uso de la fórmula de Green en Variable Compleja. Conocemos la fórmula de Green de varios cursos anteriores. El enunciado básico que nos interesa en una primera aplicación se refiere a los dominios de Jordan acotados por una curva simple y cerrada y C^1 a trozos (lo que ya hemos llamado contornos con anterioridad). Empezaremos recordándolo.

Teorema 1 *(Green). Si Ω es un dominio en el plano, acotado por un contorno γ, orientado positivamente (en el sentido contrario al de las agujas de reloj). Si las funciones P, $Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, entonces*

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Observaciones. (1) En la literatura se pueden encontrar enunciados tanto más especiales como más generales que el que damos aquí. Es posible que en los cursos de Cálculo II o Análisis Matemático este teorema se haya formulado sólo para dominios un poco más especiales (con mejor frontera, por ejemplo los convexos o los que tengan frontera suave, simple y cerrada) pero aquí necesitaremos la versión general dada arriba.

(2) La integral doble que aparece en el lado derecho de la fórmula se puede tomar tanto sobre Ω como sobre $\overline{\Omega}$ puesto que la frontera Ω tiene medida de área nula que, por tanto, no influye en la integración. No obstante, la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales hasta la frontera es importante. No es suficiente pedir que sean continuas sólo en Ω (porque si, por ejemplo, no están acotadas cuando nos acercamos a la frontera del dominio, esto podría dar problemas).

Antes de ilustrar el uso del Teorema de Green en Variable Compleja, conviene recordar de la entrega de apuntes sobre las integrales de línea que, en una integral a lo largo de la curva γ, escribiremos con frecuencia $dz = dx + i\,dy$. Esto es natural: si la curva está parametrizada como $z = \gamma(t)$, es decir, $x + yi = u(t) + i\,v(t)$, entonces $\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = u'(t) + i\,v'(t) = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$, etc.

Si f una función holomorfa en un dominio D, *a priori* no sabemos nada acerca de su derivada. Sin embargo, veremos más adelante que toda función holomorfa en D se comporta de manera parecida a las series de potencias y, en particular, será derivable infinitas veces y tendrá derivadas continuas. Por tanto, sabremos que sus partes real e imaginaria, u y v, son de clase C^1 en Ω. Puesto que este hecho todavía no está demostrado, de momento vamos a tener que añadir la hipótesis de que u y v son de clase C^1 en Ω (o, equivalentemente, que $f' = u_x + i\,v_x$ es continua en Ω).

Teorema integral de Cauchy: versión débil para contornos. El Teorema integral de Cauchy es uno de los resultados fundamentales en Análisis complejo. De entre sus diferentes enunciados, unos más especiales y otros más generales, veremos primero una versión sencilla.

Recordemos que, por el Teorema de Jordan (de Topología), cada contorno γ determina dos componentes conexas del complementario de su traza, $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. Una de ellas es un dominio acotado y simplemente conexo (el dominio interior a γ, al que a menudo denotamos D_{int} o incluso, simplemente, D cuando la dependencia de γ está clara) y el otro (el dominio exterior a γ, al que denotamos D_{ext}) es no acotado.

Teorema 2 *(Teorema integral de Cauchy, enunciado básico para curvas simples). Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano y γ un contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) cuya traza está contenida en Ω. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y, además, f' es continua en Ω, entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Otro enunciado (equivalente): Sea Ω un dominio arbitrario en el plano y γ un contorno cuya traza está contenida en Ω junto con el dominio D_{int} interior a γ: $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\} \subset \Omega$. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y, además, f' es continua en Ω, entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

DEMOSTRACIÓN. $\square$ Veamos primero cómo se prueba el primer enunciado. Éste se sigue fácilmente del Teorema de Green, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $f = u + i\,v$, entonces f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en Ω. Además, hemos supuesto que u y v son de clase C^1 en Ω. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Green, empezando por la misma cuenta que en una de las entregas anteriores de los apuntes y en el Ejercicio **??** y obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma (u+iv)\,(dx+i\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx\\ &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 + i\cdot 0 = 0\,.\end{aligned}$$

Cabe observar que, cuando Ω es un dominio simplemente conexo y $\{\gamma\}\subset\Omega$, entonces Ω contiene junto con γ al dominio interior acotado por γ. Por tanto, la primera versión del enunciado es un caso especial del segundo enunciado.

El segundo enunciado también se puede deducir del primero, así que ambos son equivalentes. Basta reducir el dominio inicial hasta obtener uno que sea simplemente conexo y que contenga a la traza de la curva y al dominio interior. Eso se puede conseguir, por ejemplo, de la siguiente manera: recubrimos la traza de γ por discos abiertos contenidos en Ω y, usando la compacidad de la traza, escogemos un subrecubrimiento finito de la misma por discos abiertos. Uniendo esos discos con D_{int} (que tiene intersección no vacía con cada uno de ellos), se obtiene un dominio contenido en Ω y simplemente conexo que, a su vez, contiene a $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}}\cup\{\gamma\}$. (Esta afirmación requiere un razonamiento más detallado y el uso de algunos ejercicios de Topología pero no daremos más detalles aquí.) Por tanto, el segundo enunciado se puede deducir del primero. ■

Obsérvese que la hipótesis adicional de que u y v son de clase C^1 en Ω es muy importante. Cuando se elige otro método para demostrar el teorema, el principal escollo consiste en probar este hecho antes de saber que holomorfía implica analiticidad. Para evitar moverse en un círculo vicioso, normalmente el camino hacia la versión más general del teorema es bastante complicado y requiere muchos razonamientos adicionales. Veremos a continuación algunas versiones más generales del Teorema integral de Cauchy.

Las aplicaciones del Teorema integral de Cauchy en la práctica suelen ser fáciles. Una vez fijada la función f, lo importante es elegir correctamente el dominio Ω. Ilustraremos esto con un par de ejemplos muy sencillos.

Ejemplo 1. *Si γ es el rectángulo con los vértices i, 0, 4 y $4+i$, entonces $\int_\gamma e^{-3z^2+12}dz = 0$. La justificación es simple: la función $f(z) = e^{-3z^2+12}$ es holomorfa en todo el plano (entera) y, además, es inmediato que su derivada $f'(z) = -6ze^{-3z^2+12}$ es continua, así que podemos tomar $\Omega = \mathbb{C}$, un dominio simplemente conexo. Obviamente, γ es suave a trozos, simple y cerrada (se recomienda escribir una parametrización como ejercicio) y $\{\gamma\}\subset\Omega$.*

Obsérvese que normalmente tenemos la flexibilidad de reducir el dominio Ω si nos conviene; lo importante es que el contorno γ esté contenido en él. En el ejemplo anterior, nos hubiera valido en lugar de $\Omega = \mathbb{C}$ tomar como Ω el disco $D(0,7)$ o cualquier otro disco o rectángulo abierto que contuviese al rectángulo indicado.

Ejercicio 2. *Calcule la siguiente integral, justificando la respuesta: $\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+9}$, donde la curva está orientada en el sentido positivo (contrario al de las agujas de reloj).*

SOLUCIÓN. En este caso la orientación de la curva, que es la circunferencia de centro i y radio 1, va a ser irrelevante ya que la integral será igual a cero. En efecto, la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$ es holomorfa (y con derivada continua, fácil de calcular) en todos los puntos del plano salvo en los ceros del denominador, que son $\pm 3i$.
Podemos escoger el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z < \frac{5}{2}\}$, que es simplemente conexo (al ser una banda horizontal abierta), contiene a la circunfencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ y, además, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con derivada continua allí, así que el resultado de integración es cero en virtud de la versión básica del Teorema integral de Cauchy. Por supuesto, son posibles otras muchas elecciones válidas de Ω.

Teorema 3 *(Teorema de Cauchy-Goursat). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado (junto con su dominio interior) con los lados paralelos a los ejes y ∂R su borde (compuesto por cuatro segmentos). Entonces $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$, independientemente de la orientación de ∂R.*

(Obviamente, si la integral $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ cuando ∂R tiene orientación positiva, la misma integral es nula también con la orientación opuesta.)

DEMOSTRACIÓN. □ Véanse los apuntes (hechos a mano) de la Prof. María Victoria Melián titulados "El teorema de Cauchy". La idea de la prueba consiste en dividir el rectángulo R en varios rectángulos (4 en cada paso, de forma inductiva) y aplicar un proceso límite, usando el teorema de los compactos encajados conocido de cursos previos.

(Esta demostración se incluirá en una versión más completa de estos apuntes, próximamente.) ■

Teorema integral de Cauchy y existencia de la primitiva en dominios convexos

Nuestra próxima tarea consiste en abordar de forma rigurosa la existencia de la función primitiva de una función holomorfa en ciertos dominios especiales. Estableceremos la existencia de la función primitiva en todos los dominios convexos. Ya con esta versión especial seremos capaces de probar varios resultados fundamentales como son la fórmula integral de Cauchy para las circunferencias y, como su consecuencia, el hecho de que toda función holomorfa en un dominio es analítica (localmente se puede representar como serie de potencias).

Teorema 4 *(Existencia de la función primitiva en dominios convexos). Sea Ω un dominio convexo en el plano. Entonces existe una función $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$ en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. □ La demostración se basa en las parametrizaciones de dos caminos diferentes de un punto a otro y en las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, de nuevo, se puede encontrar en los apuntes de la Prof. María Victoria Melián, para el caso de un disco en lugar de un dominio con la propiedad (R), pero es idéntica en ambos casos. ■

Una versión más general del Teorema integral de Cauchy nos enseñará que, en un dominio simplemente conexo, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier curva que une dos puntos dados tiene el mismo valor (es independiente del camino), lo cual nos permitirá definir las funciones primitivas.

Al igual que en Cálculo, la diferencia de dos primitivas cualesquiera de la misma función será constante. Veremos también que, en un dominio simplemente conexo, la existencia de una primitiva es equivalente a la holomorfía, gracias también a los conocimientos adquiridos previamente. Formularemos, aunque sin dar una demostración completa, el Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos que nos dará una caracterización de dichos dominios en términos de las funciones que son holomorfas en ellos. Esto representa un importante nexo entre la topología del plano y la variable compleja.

Teorema 5 *(Teorema integral de Cauchy para dominios convexos). Sea Ω un dominio en el plano con la propiedad (R), $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ una curva cerrada (no necesariamente simple) y C^1 a trozos cuya traza está contenida en Ω. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Es la misma que para la Proposición 1, empleando el mismo cálculo directo y sabiendo que f tiene función primitiva en Ω (por el Teorema 4). ■ Puede verse que, en un dominio simplemente conexo, la integral de una función holomorfa desde un punto hasta otro no depende del camino elegido. Por ejemplo, el siguiente dibujo ilustra este hecho para dos caminos poligonales desde el punto a hasta el punto z. Obsérvese que el dominio allí representado no es simplemente conexo (tiene dos "agujeros") pero puede verse que el resultado sigue siendo cierto mientras el contorno obtenido uniendo ambos caminos no rodee a ninguno de los agujeros (componentes del complementario) de Ω.

Este hecho nos permite definir correctamente la función primitiva de una función holomorfa.

Teorema 6 *(Existencia de la función primitiva). Sea Ω un dominio simplemente conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces existe una función $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. La continuidad de f (que se sigue de su diferenciabilidad compleja) garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier curva cerrada y suave a trozos. Fijemos un punto $a \in \Omega$, como en el dibujo anterior (pero recordando que esta vez tenemos la hipótesis de que Ω es simplemente conexo). Si $z \in \Omega$ es cualquier otro punto y γ y Γ son dos curvas suaves a trozos desde a hasta z, entonces $\gamma + \Gamma^-$ es una curva cerrada y C^1 a trozos (que empieza y termina en a).

Conviene señalar que una demostración rigurosa de este hecho, a partir de los axiomas de geometría euclídea de David Hilbert (usando, por ejemplo, inducción transfinita y varias herramientas geométricas) llenaría probablemente varias páginas. De ahí que nuestra demostración no sea muy rigurosa pero debe resultar creible. (No existe ninguna forma de trivializar este resultado: todas las demostraciones exigen un trabajo arduo.)

Por el Teorema integral de Cauchy (caso general), se sigue que

$$0 = \int_{\gamma+\Gamma^-} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\Gamma^-} f(z)\,dz$$

y, por tanto, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$, por las propiedades básicas de las integrales de línea. Conclusión: la integral de línea desde a hasta z no depende de la elección de la curva suave a trozos y podemos escribir $\int_a^z f(w)\,dw$ para denotar a cualquiera de ellas, ya que todas tienen el mismo valor. Esto nos permite definir la función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,dw\,, \qquad z \in \Omega\,.$$

Aún queda por comprobar que la función definida de esa manera, en efecto, tiene derivada compleja y que ésta es precisamente la función inicial. La tarea se reduce a comprobar que

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{z+h} f(w)\,dw - \int_a^z f(w)\,dw}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} = f(z)\,.$$

Para justificar la penúltima igualdad, sirven los razonamientos mencionados en las observaciones a continuación de la prueba (uniendo los caminos de a a z y de z a $z+h$).

La comprobación final del límite es como sigue. Puesto que la integral $\int_z^{z+h} f(w)\,dw$ no depende del camino (suave a trozos) desde z hasta $z+h$, sin pérdida de generalidad podemos tomar el segmento $[z, z+h]$ como camino. Puesto que su longitud es precisamente $\ell([z,z+h]) = |(z+h)-z| = |h|$, teniendo en cuenta la estimación básica para las integrales de línea de una entrega anterior de apuntes:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} - f(z) \right| &= \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)h\right|}{|h|} = \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)\int_z^{z+h} dw\right|}{|h|} \\
&= \frac{\left|\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right|}{|h|} \le \frac{\ell([z,z+h]) \cdot \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)|}{|h|} \\
&= \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)| \to 0\,, \qquad h \to 0\,,
\end{aligned}$$

debido a la continuidad de f en el punto z. ■

Observaciones. (1) En la demostración dada arriba, a primera vista parece que sólo usamos la continuidad de f pero no es asi. La independencia de la integral del camino es fundamental ya que se ha usado dos veces en la prueba. Las funciones continuas no necesariamente tienen esta propiedad. Por tanto, la hipótesis de que f sea holomorfa es fundamental.

(2) Como en el cálculo, no existe sólo una función primitiva de f. No obstante, la primitiva de una función holomorfa fija es única, salvo un sumando constante (y por eso con frecuencia diremos *la primitiva*): si F_1 y F_2 son dos primitivas de la misma función holomorfa f, entonces $F = F_1 - F_2$ es holomorfa en Ω y satisface la condición

$$F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

en Ω y, debido a un resultado conocido, F es constante. En otras palabras, si F_1 es una primitiva de F, toda primitiva es de la forma $F = F_1 + C$ para una constante compleja C.

(3) La primitiva obviamente depende de la elección del "punto base" a. Si cambiamos el punto inicial del camino de integración de a a otro punto $b \in \Omega$, la primitiva variará en un sumando, ya que

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,dw = \int_a^b f(w)\,dw + \int_b^z f(w)\,dw = F(b) + F_1(z)\,.$$

En los teoremas relativos a los dominios con la propiedad (R), usamos como punto base el punto z_0 de la definición de dicha propiedad.

(4) Finalmente, si como punto base para definir la primitiva tomamos un punto $c \in \Omega$ y $a, b \in \Omega$ son otros dos puntos y sumamos dos caminos, uno desde c hasta a y otro desde a hasta b para obtener un camino desde c hasta b, se sigue que

$$F(b) = \int_c^b f(z)\,dz = \int_c^a f(z)\,dz + \int_a^b f(z)\,dz = F(a) + \int_a^b f(z)\,dz$$

y, por tanto, obtenemos la *versión compleja del Teorema fundamental del cálculo*:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)\,.$$

Al igual que en Cálculo, podemos interpretar que la constante C se cancela en la identidad anterior, así que la integral desde a hasta b no depende de la primitiva F elegida, es decir, no depende del punto base c elegido.

Ejercicio 3. *Sea γ una curva C^1 a trozos desde el punto 1 hasta el punto i, con la traza contenida en el semiplano superior abierto (salvo el punto inicial 1). Calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}\,.$$

SOLUCIÓN. Tenemos poca información acerca de γ y no disponemos de ninguna parametrización, pero tampoco necesitamos conocer más detalles. Según las condiciones del problema, la traza $\{\gamma\}$ forma parte del dominio simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, donde podemos definir el logaritmo como función holomorfa, mediante la fórmula habitual:

$$\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z\,.$$

También sabemos de los apuntes sobre los logaritmos que su derivada en el dominio indicado es $(\log z)' = \frac{1}{z}$. En otras palabras, la función logaritmo es la primitiva de $\frac{1}{z}$ (salvo un sumando constante). Por ejemplo, eligiendo como punto base $a = i/2$, cualquier primitiva tendrá la forma

$$F(z) = \int_{i/2}^z \frac{1}{w}\,dw = \log z + C\,,$$

para cierta constante $C \in \mathbb{C}$. Entonces podemos calcular la integral a lo largo de nuestra curva γ desconocida (pero con traza contenida en un dominio donde la primitiva está definida, que es el semiplano superior), obteniendo de la versión compleja del Teorema fundamental del cálculo (y de la determinación elegida del logaritmo):

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = F(i) - F(1) = \log i - \log 1 = \log i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i\,. \qquad \blacksquare$$

Teorema integral de Cauchy: versiones generales

Como aplicación del Teorema 6, daremos una versión del teorema de Cauchy mucho más general que las vistas anteriormente. En la literatura se pueden encontrar versiones aún más generales que, según las hipótesis topológicas, pueden constituir una versión homotópica u homológica del resultado. Usaremos esta versión general en lo que queda del curso.

Teorema 7 *(Teorema integral de Cauchy, versión general). Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ una curva cerrada y C^1 a trozos (no necesariamente simple) cuya traza está contenida en Ω. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Por el Teorema 6, sabemos que f tiene una función primitiva en Ω. Por el mismo cálculo directo que en la Proposición 1, se sigue la conclusión. ■

En el caso cuando γ es, además, simple (o sea, cuando es un contorno), podemos aplicar el teorema anterior a otros dominios, no necesariamente simplemente conexos, usando la típica reducción del dominio como las que ya comentamos antes, en relación con el Teorema 2.

Corolario 1 *(Teorema integral de Cauchy, versión general). Sea Ω un dominio arbitrario en el plano y γ un contorno cuya traza está contenida en Ω junto con el dominio D_{int} interior a γ: $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\} \subset \Omega$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. □ Es fácil encontrar un dominio D simplemente conexo y tal que $\overline{D_{\text{int}}} \subset D \subset \Omega$. Por ejemplo, si la distancia entre $\overline{D_{\text{int}}}$ y $\partial\Omega$ es d, entonces $d > 0$ y podemos tomar como D el siguiente dominio:

$$D = \cup\{D(z; d/2) : z \in D_{\text{int}}\}.$$

(Al igual que en el Teorema 2, no entrarmos en los detalles de la demostración de que este dominio es simplemente conexo, aunque es intuitivamente claro.) La conclusión se sigue del Teorema 7 aplicado al dominio D. ■

Ejercicio 4. *Sea $\gamma = C(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ con cualquier orientación. Calcule $\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\,dz$.*

SOLUCIÓN. Obsérvese que $g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ ya no es holomorfa en todo el plano porque el denominador se anula en los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Es un ejercicio sencillo e instructivo demostrar que ésos son los únicos ceros en todo el plano, usando la definición de la función seno a través de la función exponencial. De hecho, ya hemos visto ejercicios análogos en los apuntes sobre las series y funciones elementales y en las hojas de problemas.
Escojamos, por tanto, un dominio reducido, por ejemplo, $\Omega = D(2; \frac{10}{9}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < \frac{10}{9}\}$. Este disco es simplemente conexo y no contiene a ninguno de los puntos z_n (la comprobación para $z_1 = \pi$ requiere un poco de cálculo mientras que para el resto de los puntos z_n esto es bastante obvio). Por tanto, g es holomorfa en Ω) y contiene a la curva γ. Aplicando el teorema de Cauchy (Corolario 1), se deduce que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\,dz = 0. \qquad ■$$

Fórmula integral de Cauchy

Uno de los teoremas centrales en Variable Compleja es la fórmula integral de Cauchy, que nos mostrará cómo calcular el valor de una función holomorfa (o de sus derivadas) si conocemos sólo los valores que toma la función en un contorno (curva cerrada, simple y suave a trozos). Este resultado nos ayudará a calcular numerosas integrales, incluidas varias integrales impropias vistas en otros cursos y que podrían ser complicadas de evaluar por métodos elementales. También nos permitirá deducir numerosos teoremas cualitativos acerca del comportamiento de las funciones holomorfas que serán de nuevo unos fenómenos típicos de variable compleja, sin análogos en otros contextos en Análisis matemático.

Incluso la versión más simple de la fórmula integral de Cauchy, formulada para las circunferencias, nos bastará en esta entrega de apuntes para deducir un resultado fundamental que ya anticipamos en clase: toda función holomorfa es analítica. Dicho de manera más precisa, puede escribirse como serie de potencias en cada disco contenido en el dominio donde la función es holomorfa. Una vez fijado el centro, veremos que esa serie (de Taylor) es única. Esto tendrá varias consecuencias importantes como las llamadas estimaciones de Cauchy para las funciones enteras, de las que es un caso especial el teorema de Liouville. Dichas estimaciones nos ayudan a entender mejor cómo pueden crecer las funciones enteras y qué imágenes pueden tener.

Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias

Motivación de la fórmula integral de Cauchy. Uno de los ejercicios de las hojas nos dice que, si f es una función compleja, continua en el disco abierto $D(a;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$, $0 < \varepsilon < R$ y C_ε es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon\}$, orientada positivamente (por ejemplo, parametrizada como $C_\varepsilon(t) = c + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$) entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

Si en lugar de suponer la continuidad de f suponemos que es holomorfa en $D(a;R)$, resultará que, de hecho,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a),$$

para todo ε con $0 < \varepsilon < R$, una afirmación mucho más fuerte (la conclusión no se cumple sólo en el límite sino, de hecho, para cada circunferencia). Esta igualdad constituye un caso especial de la fórmula integral de Cauchy.

Veremos en breve que la afirmación sigue siendo cierta para cualquier otro punto a en el interior de la circunferencia C_ε en lugar del centro. Después veremos incluso que la circunferencia se puede sustituir por cualquier otra curva simple y cerrada γ en cuyo interior se encuentra el punto a. Finalmente, veremos que el resultado sigue siendo cierto para cualquier dominio simplemente conexo en lugar del disco $D(a;R)$, siempre y cuando la curva γ esté contenida en el dominio junto con su dominio interior (para la definición del dominio interior a una curva de Jordan, véase la parte final de la entrega anterior de los apuntes). Por supuesto, cuanto más general sea la afirmación, más difícil será demostrarla y habrá más consideraciones topológicas a tener en cuenta.

> COMENTARIO TÉCNICO. Como en otras muchas situaciones en Análisis, con frecuencia cambiamos la letra usada para la variable de integración, de manera que también escribiremos, por ejemplo,
>
> $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-a}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta\,.$$
>
> Cuando se quiere hacer énfasis en el hecho de que el punto a no es fijo sino que nos interesa variarlo en el interior de la circunferencia para tener una función de z, también escribiremos la fórmula como
>
> $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw\,.$$
>
> Cambios de notación de este tipo también serán frecuentes en estos apuntes, según nos convenga.

Enunciado de la fórmula integral de Cauchy para las circunferencias. El teorema de Cauchy-Goursat visto en la entrega anterior admite una generalización que nos será muy útil. Recordemos de la entrega anterior de apuntes (sobre el teorema integral de Cauchy y la función primitiva) que, entre otros dominios, los discos abiertos, rectángulos abiertos y los semiplanos con el borde horizontal o vertical todos tienen la propiedad (R) estudiada allí.

Teorema 8 *(Teorema de Cauchy-Goursat generalizado). Sea Ω un dominio en el plano, $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado (junto con su dominio interior) con los lados paralelos a los ejes, ∂R su borde (compuesto por cuatro segmentos) y $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ un conjunto finito de puntos en el dominio interior al rectángulo R. Si F es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$) y para cada $i \in \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ se satisface la condición adicional*

$$\lim_{z\to z_i} (z - z_i)F(z) = 0\,,$$

entonces $\int_{\partial R} F(z)\,dz = 0$, independientemente de la orientación de ∂R.

DEMOSTRACIÓN. □ Véanse los apuntes (hechos a mano) de la Prof. María Victoria Melián titulados "El teorema de Cauchy", donde este resultado viene justo a continuación del Teorema de Cauchy-Goursat visto antes. La misma idea que se usa en el caso $N = 1$ nos indica cómo se demuestra el caso general). En el caso de un punto z_1, se divide el rectángulo R en 9 rectángulos, de los que uno es un cuadrado centrado en z_1 y suficientemente pequeño, para usar la hipótesis con el límite.

(Esta demostración se incluirá en una versión más completa de estos apuntes, próximamente.) ■

Teorema 9 . *Sea Ω un dominio en el plano con la propiedad (R) y F una función holomorfa en Ω, salvo en un conjunto finito $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. Supongamos que, además, para cada $i \in \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ se satisface la condición adicional*

$$\lim_{z\to z_i} (z - z_i)F(z) = 0\,.$$

Entonces:

(a) existe una función $G \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $G' = F$ en Ω (una función primitiva de F).

(b) para todo camino γ en Ω, cerrado y C^1 a trozos y que evita el conjunto $\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$), tenemos que

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 0\,.$$

DEMOSTRACIÓN. □ La demostración se deja como ejercicio. ■

Cuando el integrando de una integral de línea no es necesariamente holomorfo pero es una fracción con denominador lineal, también seremos capaces de evaluar la integral, gracias a alguna de las distintas versiones de la Fórmula integral de Cauchy. Entre otras cosas, la fórmula nos dice lo siquiente: dada una función holomorfa en un disco, basta conocer sus valores sólo en una circunferencia dentro del disco para recuperar los valores de la función en cualquier punto dentro de dicha circunferencia. Veamos cómo se puede deducir esto a partir del Teorema 8.

Teorema 10 *(Fórmula integral de Cauchy, versión básica). Sea Ω un dominio en el plano con la propiedad (R) y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

(a) Si γ es un camino cerrado y C^1 a trozos en Ω y z un punto arbitrario en $\Omega \setminus \{\gamma\}$, entonces

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w-z}\,. \tag{1}$$

(b) Si $\overline{D}(z;r) = \{w : |w-z| \le r\} \subset \Omega$ y $C = \{z : |w-z| = r\}$ denota a la circunferencia de radio r, centrada en el punto z y con orientación positiva, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z)\,. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. □ (a) Consideremos la función F dada por

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w-z}, \quad w \in \Omega \setminus \{z\}\,.$$

Es evidente que $F \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{z\})$ y, además,

$$\lim_{w\to z} (w-z) F(w) = \lim_{w\to z} (f(w) - f(z)) = 0\,,$$

por la continuidad de f en Ω. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 9 para deducir que $\int_\gamma F(w)\, dw = 0$. Por tanto, obtenemos

$$0 = \int_\gamma F(w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\, dw\,,$$

lo cual demuestra la fórmula (1) ya que $f(z)$ no depende de w y se puede factorizar fuera de la última integral.

(b) Se sigue directamente del apartado (a), parametrizando C de manera habitual:

$$w = z + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad dw = ire^{it}\,dt,$$

obteniendo que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\,dt = 2\pi i. \qquad \blacksquare$$

Por supuesto, muchas veces escribiremos la fórmula (2) en el Teorema 10 en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-c}\,dz = f(c),$$

con las variables cambiadas, sobre todo cuando nos fijemos en un punto concreto c y la integral de línea ya venga escrita con la variable de integración z. Veremos ahora algunos ejemplos del uso de esta versión básica de la Fórmula integral de Cauchy.

Ejemplo 2. *Sea C la circunferencia unidad, orientada positivamente. Aplicando el Teorema 10. (b) directamente a la función entera $f(z) = \cos z$ y a la circunferencia unidad C (con centro en $c = 0$), obtenemos*

$$\int_C \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

Fórmula integral de Cauchy: versiones más generales

Conviene comentar que tanto el teorema integral de Cauchy como la fórmula integral de Cauchy admiten dos versiones equivalentes. En una de ellas, el dominio es simplemente conexo y el contorno es arbitrario. En la otra, el dominio es arbitrario pero el contorno tiene que estar contenido en él junto con su dominio interior.

Sea Ω un dominio en el plano acotado por dos contornos, Γ y γ, de manera que la traza de γ esté contenido en el dominio interior a Γ. Tal y como ya hicimos en los cursos de cálculo, orientaremos la frontera $\partial\Omega$ de manera que, al recorrerla en el sentido que dicta su parametrización, el dominio nos quede siempre a la izquierda; eso significa darle al contorno Γ la orientación positiva y a γ, la negativa: γ^-.

Dominios acotados por dos contornos disjuntos. El procedimiento empleado en la demostración del siguiente resultado es bastante frecuente en Análisis complejo y conviene recordarlo.

Proposición 2. *Sean γ y Γ dos contornos tales que $\overline{D_{\mathrm{int}}(\gamma)} = D_{\mathrm{int}}(\gamma) \cup \{\gamma\} \subset D_{\mathrm{int}}(\Gamma)$ (geométricamente, Γ "rodea" a la curva γ y a su dominio interior) y sea D el dominio acotado por ambas curvas γ y Γ. Sean Γ y γ ambas orientadas positivamente. Si Ω es un dominio tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. No daremos ninguna demostración rigurosa pero es fácil ver que podemos “cortar D en dos trozos”, uniendo un punto de $\{\gamma\}$ con otro en $\{\Gamma\}$ mediante un segmento $I = [a, b]$, $a \in \{\gamma\}$, $b \in \{\Gamma\}$, por ejemplo, eligiendo $a \in \{\gamma\}$ y $b \in \{\Gamma\}$ tal que $|a - b| = \operatorname{dist}(a, \{\Gamma\})$. Con eso se asegurará de que ningún punto interior del intervalo I tiene intersecciones con ninguna de las dos curvas. (Por supuesto, existen otras formas de elegir los segmentos I y J pero la elección indicada aquí es una opción segura.) De manera análoga, podemos unir otro punto en γ con otro en Γ mediante un segmento $J = [c, d]$, $c \in \{\gamma\}$, $d \in \{\Gamma\}$ y de manera que $I \cap J = \emptyset$. En general, los intervalos I y J no están necesariamente contenidos en la misma recta, como parece quedar reflejado en el dibujo (es decir, su posición puede ser más general).

Si denotamos como $I^- = [b, a]$ y $J^- = [d, c]$ a los mismos segmentos pero con orientación opuesta (como curvas recorridas en el sentido contrario) y por Γ_1, Γ_2 a los dos arcos que componen la curva Γ y que unen b con d y por γ_1, γ_2 a los dos arcos que componen la curva γ y que unen a con c, obtendremos dos nuevos contornos:

$$C_1 = I \cup \Gamma_1 \cup J^- \cup \gamma_1^-, \qquad C_2 = I^- \cup \gamma_2 \cup J^- \cup \Gamma_1 .$$

Estos dos contornos, por el Teorema de Jordan (mencionado en apuntes anteriores) acotan dos dominios simplemente conexos, D_1 y D_2, respectivamente. A ambos contornos se les puede aplicar el Teorema 2 para obtener

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0 = \int_{C_2} f(z)\,dz .$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 .$$

Escribiendo ambas integrales como sumas de integrales a lo largo de diferentes trozos y observando que las integrales a lo largo de I e I^- se cancelan y lo mismo para J e J^-.

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz ,$$

lo cual implica la conclusión deseada. ■

Fórmula integral de Cauchy: versión general para contornos. Ya hemos demostrado la Fórmula integral de Cauchy para circunferencias. Ahora veremos que el resultado sigue siendo válido para contornos arbitrarios.

Teorema 11 *(Fórmula integral de Cauchy para contornos). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = f(z), \tag{3}$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Asimismo, se tiene la fórmula para las derivadas de orden n:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw . \tag{4}$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $z \in D_{\text{int}}(\Gamma)$ un punto arbitrario. Entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z;r) \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$. Si llamamos γ a la circunferencia de radio r centrada en z, es inmediato que estamos en condiciones de aplicar la Proposición 2 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)$, que es holomorfa en todos los puntos w del dominio D acotado por las curvas γ y Γ (nótese que $z \notin D$). Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\,,$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 2 y la segunda de la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias, Teorema 10. b).

Puesto que antes ya habíamos demostrado la fórmula para las derivadas calculadas *en el centro* de la circunferencia γ, aplicando la Proposición 2 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)^{n+1}$, también obtenemos la fórmula

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = f^{(n)}(z)\,. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 5. *Sea γ la circunferencia unidad, orientada positivamente. Denotemos por γ^- a la misma circunferencia pero con orientación negativa. Calcule las integrales*

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\,dz.$$

SOLUCIÓN. $\square$ Es fácil ver que

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\,dz = -\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z-(-\frac{1}{3})}\,dz = -2\pi i\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\pi i\,.$$

La primera igualdad es una consecuencia directa de la fórmula para el cambio de orientación vista en los apuntes sobre integrales de línea. La segunda se obtiene aplicando la Fórmula integral de Cauchy al punto $a = -\frac{1}{3}$ situado en el interior de la circunferencia unidad, a la función $f(z) = \cos(\pi z)$, que es holomorfa en todo el plano (entera) y a cualquier dominio que contenga al disco unidad cerrado; por ejemplo, podemos elegir tanto $\Omega = D(0;R)$ con $R > 1$ como $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > -2\}$, entre otros. La tercera igualdad se tiene porque, como ya sabemos, $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Para calcular la segunda integral, basta aplicar la fórmula (4) a la segunda derivada:

$$f''(-\frac{1}{3}) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\,dw.$$

a la función $f(z) = \cos(\pi z)$, obteniendo

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z+\frac{1}{3})^3}\,dz = \pi i f''(-\frac{1}{3}) = \pi i(-\pi^2)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^3 i}{2}. \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejercicio es aparentemente más complicado porque el denominador se anula en dos puntos pero, de hecho, resulta bastante sencillo.

Ejercicio 6. *Para la misma circunferencia γ que en el Ejercicio 5 (con orientación positiva), calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\,dz.$$

SOLUCIÓN. $\square$ El denominador $z^2-3z=z(z-3)$ se anula en dos puntos: en $z=0$ y en $z=3$ pero sólo uno de ellos, $z=0$, está en el dominio interior a la circunferencia γ, que es el disco unidad $\mathbb{D}$. Por tanto, debemos definir $f(z)=\frac{\cos z}{z-3}$ para tener el integrando escrito en una forma conveniente para la aplicación de la Fórmula integral de Cauchy (en este caso, con $c=0$):

$$\frac{\cos z}{z^2-3z}=\frac{f(z)}{z}.$$

Para poder aplicar el teorema, necesitamos además un dominio Ω que cumpla dos condiciones a la vez: que f sea holomorfa en Ω (por tanto, $3\notin\Omega$ será necesario) y que el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}=\mathbb{D}\cup\gamma\subset\Omega$. Podemos elegir, por ejemplo, $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z<2\}$ (por supuesto, hay muchos otros). Por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\,dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz=2\pi i\,f(0)=-\frac{2\pi i}{3}. \qquad \blacksquare$$

Antes ya habíamos calculado de forma explícita que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}\,dw=1,$$

para una circunferencia centrada en el punto z. Ahora podemos ver que la fórmula sigue siendo válida para cualquier contorno alrededor del punto z. La razón es simple: en el caso particular del Teorema 11 cuando f es la función constante uno, obtenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 2. *Sea Ω un dominio en el plano y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw=1,$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Esto nos lleva al siguiente punto del temario, que no trataremos en mucho detalle. Bastará con conocerlo a título informativo y entender los ejemplos.

Índice de una curva respecto de un punto

Sea Γ un contorno que encierra una región $D_{\text{int}}(\Gamma)$ y z un punto tal que $z \notin \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} = D_{\text{int}}(\Gamma) \cup \{\Gamma\}$. Puesto que $\operatorname{dist}(z, \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)}) > 0$, existe un dominio Ω tal que $\overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} \subset \Omega$ y $z \notin \Omega$. Por tanto, $f(w) = 1/(w-z)$ es holomorfa como función de la variable w en Ω (puesto que el denominador no se anula). Según el Teorema integral de Cauchy, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z}\, dw = 0\,.$$

Junto con el Corolario 2, esta observación nos dice que, si $z \notin \{\Gamma\}$ y Γ tiene orientación positiva, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \begin{cases} 1, & \text{si } \ z \in D_{\text{int}}(\Gamma) \\ 0, & \text{si } \ z \in D_{\text{ext}}(\Gamma) \end{cases}\,.$$

Obsérvese que, geométricamente, en el primer caso la curva Γ da una vuelta alrededor de z y en el segundo no da ninguna vuelta alrededor de dicho punto. El valor $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z}\, dw$ se suele llamar el *ìndice* del punto z respecto de la curva Γ. Puede definirse en situaciones mucho más generales, donde no se pide que Γ sea una curva simple. Veamos el resultado pertinente.

Teorema 12. *Sea γ una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple). Entonces para todo $z \notin \{\gamma\}$, el número*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw$$

es entero.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos parametrizar γ de manera que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Puesto que γ es C^1 a trozos, tenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds\,.$$

Si definimos la función $F : [0,1] \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds\,,$$

obviamente, se cumple

$$F(0) = 0\,, \qquad F(1) = \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw\,.$$

Además, por el Teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\left((\gamma(t)-z)e^{-F(t)}\right)=\gamma'(t)e^{-F(t)}-F'(t)(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}=\gamma'(t)e^{-F(t)}-\gamma'(t)e^{-F(t)}=0\,.$$

Se sigue que la función $(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}$ es constante y, por tanto, por un lado:

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}=(\gamma(0)-z)e^{-F(0)}=\gamma(0)-z=\gamma(1)-z$$

(al ser la curva cerrada, se cumple $\gamma(1)=\gamma(0)$) y también

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}=(\gamma(1)-z)e^{-F(1)}=(\gamma(1)-z)e^{-F(1)}\,.$$

Se sigue que $(\gamma(1)-z)e^{-F(1)}=(\gamma(1)-z)$. Puesto que $z\not\in\{\gamma\}$, es imposible que $\gamma(1)-z=0$, luego $e^{-F(1)}=1$, así que (¡por fin llegamos a usar esos ejercicios con la exponencial y el logaritmo en una demostración!) $-F(1)=2\pi i m$, para cierto $m\in\mathbb{Z}$. Escribiendo $k=-m$, vemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw=F(1)=2\pi i k\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,,$$

y el resultado queda demostrado. ■

Definición. El índice de una curva γ, cerrada y suave a trozos, respecto de un punto $z\not\in\{\gamma\}$ es el número entero

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw\,.$$

Observaciones. (1) Es obvio que el índice es negativo para las curvas simples orientadas negativamente, debido a las propiedades básicas de la integral de línea (al revertir la orientación, se produce un cambio de signo).

(2) El significado geométrico del índice es el número de vueltas que da la curva γ alrededor del punto z. No daremos ninguna justificación formal de este hecho que, por otra parte, es claro de los casos de curvas simples, cerradas y suaves a trozos y también se puede ver si parametrizamos una circunferencia recorrida n veces y calculamos el índice respecto de su centro directamente.b

Para una curva cerrada y suave a trozos pero no simple, a diferencia de un contorno, no es aplicable el teorema de Jordan. Por ejemplo, en la figura abajo es fácil apreciar que no podemos hablar de un dominio interior y otro exterior a la curva γ representada allí. Basta fijarse en cualquiera de las dos regiones acotadas y en blanco (sin sombrear) que no se pueden considerar ni una cosa ni la otra.

Ejemplo 3. *Para los puntos p y q indicados en la figura de arriba, es obvio que γ da dos vueltas alrededor de p y sólo una alrededor de q. Por tanto,* $\mathrm{Ind}_\gamma(p)=2$, $\mathrm{Ind}_\gamma(q)=1$, *lo cual nos dice que*

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-p}\,dw=4\pi i\,,\qquad \int_\Gamma \frac{1}{w-q}\,dw=2\pi i\,,$$

sin la necesidad de de conocer la parametrización de γ ni realizar ningún cálculo.

Un recíproco del teorema de Cauchy (teorema de Morera)

Resulta que el recíproco del teorema de Cauchy es cierto, siempre bajo la hipótesis natural de continuidad (que es necesaria para poder integrar a lo largo de los distintos caminos). De hecho, no hace falta exigir que la integral a lo largo de cada contorno sea cero. Basta con pedirlo para los triángulos. Con un triángulo nos referimos a la curva cerrada y simple, suave a trozos formada por tres segmentos, orientados de forma natural: $[a,b]+[b,c]+[c,a]$, donde a, b y c son tres puntos distintos en el plano.

El teorema que enunciamos a continuación se debe al matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909). Conviene notar que los triángulos en el enunciado se pueden sustituir por rectángulos o por circunferencias, aunque es más fácil trabajar con rectángulos y triángulos.

Teorema 13 *(Morera). Sea Ω un dominio en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω junto con su interior se tiene $\int_T f(z)\,dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Enunciado equivalente: Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω se tiene $\int_T f(z)\,dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Daremos sólo una indicación. Ya hemos comentado la equivalencia entre los dos enunciados en otros resultados. Aquí se procedería de forma totalmente análoga para verificarla.

Para ver que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, basta ver que es holomorfa en cada disco $D(a;R)$ contenido en Ω. En un disco así podemos definir la primitiva de f mediante la fórmula $F(z) = \int_a^z f(w)\,dw$. (La continuidad de f garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier contorno y, en particular, sobre cualquier segmento y triángulo.) La clave de la hipótesis sobre los triángulos consiste en lo siguiente: considerando el triángulo T con los vértices a, z y $z+h$ contenido en $D(a;R)$. Entonces

$$0 = \int_T f(w)\,dw = \int_a^z f(w)\,dw + \int_z^{z+h} f(w)\,dw + \int_{z+h}^a f(w)\,dw = F(z) + \int_z^{z+h} f(w)\,dw - F(z+h),$$

con lo cual obtenemos $\int_z^{z+h} f(w)\,dw = F(z+h)-F(z)$ y podemos razonar como en la demostración del Teorema 6, aplicando razonamientos completamente análogos para probar que $F' = f$ en $D(a;R)$. ■

Como acabamos de ver, el Teorema integral de Cauchy no era un simple capricho de los matemáticos del siglo XIX por descubrir nuevas curiosidades. Gracias a los teoremas de Cauchy y de Morera, ahora sabemos que podemos caracterizar las funciones analíticas de entre todas las funciones continuas en un dominio simplemente conexo, como aquellas cuyas integrales sobre todos los triángulos se anulan.

Caracterizaciones analíticas de los dominios simplemente conexos

Ya sabemos de Topología (y de lo mencionado en nuestras clases) que un dominio Ω en el plano es simplemente conexo si y sólo si Ω es homeomorfo al disco unidad, $\mathbb{D}$, si y sólo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo en $\hat{\mathbb{C}}$. Además de estas caracterizaciones topológicas de los dominios simplemente conexos (de entre todos los dominios planos), existen también varias caracterizaciones analíticas y otras. A continuación enunciamos un resultado que nos proporciona diferentes caracterizaciones de tales dominios en términos de conceptos de Variable Compleja. Pueden añadirse más apartados pero no lo haremos aquí.

Teorema 14 *(Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos). Sea Ω un dominio en el plano. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) Ω es simplemente conexo;

(b) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo contorno γ en Ω, se cumple la condición $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$;

(c) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe una función primitiva en Ω;

(d) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe un logaritmo en Ω, es decir, una función $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = e^L$ en Ω;

(e) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe una raíz en Ω, es decir, una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = g^2$ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. No daremos una demostración completa de este resultado, sólo algunas implicaciones.

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Es el contenido de los teoremas de Cauchy y de Morera.

(a) $\Rightarrow$ (c): Es el contenido del Teorema 6.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sea Ω un dominio simplemente conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que f no se anula en Ω. Fijemos un punto $a \in \Omega$. Todo punto $z \in \Omega$ puede conectarse con a mediante una curva C^1 a trozos (por ejemplo, una línea poligonal con los lados paralelos a los ejes). Puesto que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la función $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, dado que Ω es simplemente conexo, podemos definir la función primitiva de f'/f mediante la fórmula

$$L(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw,$$

tomando la integral a lo largo de cualquier curva γ suave a trozos desde a hasta z. Por el Teorema 6, se cumple $L' = f'/f$, es decir, $f' = L'f$ en Ω.

Definiendo $g = e^{-L}f$ como en una entrega anterior de apuntes, vemos que es una función holomorfa en Ω y cumple $g' = -L'e^{-L}f + e^{-L}f' = e^{-L}(f' - L'f) = 0$ en Ω. Por el teorema visto antes ya citado varias veces, $g = e^{-L}f$ es constante en Ω y, por tanto, $L = \log f + C$, como en los apuntes anteriores. Puesto que $L \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo mismo se sigue para $\log f$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Sabiendo que existe $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ como en el apartado (d), podemos definir $g = e^{L/2} \in \mathcal{H}(\Omega)$, obteniendo $g^2 = e^L = f$. ■

Preparado por Dragan Vukotić, profesor de la asignatura en distintas ocasiones en la U.A.M.