Variable Compleja I (CURSO 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Integrales de línea complejas: definición y propiedades básicas

En esta entrega de apuntes repasaremos los conceptos básicos relativos a las curvas en el plano y definiremos las integrales de línea en forma compleja, que representarán una generalización de las integrales de línea (o a lo largo de curvas) vistas antes. Aprenderemos a estimar el valor de la integral a lo largo de una curva, una destreza básica que será esencial en varias demostraciones y soluciones de ejercicios en las posteriores entregas de apuntes y problemas. Conviene observar que normalmente no supondremos que las funciones consideradas sean holomorfas; la continuidad es suficiente para desarrollar el concepto de integral de línea. Lo que se verá después es que las funciones holomorfas nos darán unos resultados de integración espectaculares.

Funciones complejas de variable real

Antes de comenzar con la integración compleja, necesitamos aclarar algunos detalles técnicos que se necesitarán a menudo.

La derivada de una función compleja de una variable real. Una función compleja de una variable real es una función de la forma $F = u + iv$, donde $u,\ v : (a,b) \to \mathbb{R}$ son funciones derivables. Su derivada viene dada por $F'(t) = u'(t) + iv'(t)$, $t \in (a,b)$.

Ejemplo 1. *La derivada de la función $F(t) = e^{it}$, que aparece en la fórmula de Euler, viene dada por*

$$\left(e^{it}\right)' = (\cos t + i \operatorname{sen} t)' = -\operatorname{sen} t + i \cos t = i(\cos t + i \operatorname{sen} t) = i e^{it}\,, \qquad t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)\,.$$

Alternativamente, podemos derivar e^{it} observando que es la restricción de la función exponencial compleja al eje real, usando la fórmula para la derivada de la función exponencial compleja y la regla de la cadena: por tanto, primero constatamos que $\frac{d}{dz}\left(e^{iz}\right) = ie^{iz}$ y después, como caso especial, para $z = t \in \mathbb{R}$ se sigue que $\frac{d}{dt}\left(e^{it}\right) = ie^{it}$.

Antes de definirlos, repasemos más detalles técnicos relevantes.

La integral de Riemann de una función compleja de una variable real. Si $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, escrita como $F = u + iv$, donde $u,\ v : [a,b] \to \mathbb{R}$, es natural definir la integral de Riemann compleja $\int_a^b F(t)\,dt$ como

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\,.$$

Podemos calcular este tipo de integrales, esencialmente, de forma habitual, usando nuestros conocimientos de Cálculo aunque a veces es también necesario utilizar algunos conocimientos de Variable compleja que ya hemos adquirido.

Ejemplo 2. *La siguiente integral de Riemann compleja surge con cierta frecuencia:*

$$\int_0^\pi i e^{-it}\,dt = (-e^{-it})\Big|_0^\pi = 1-(-1) = 2\,.$$

Esto se puede justificar como en el Ejemplo 1. Derivando, obtenemos

$$\left(-e^{-it}\right)' = -(\cos t - i \operatorname{sen} t)' = \operatorname{sen} t + i\cos t = i(\cos t - i\operatorname{sen} t) = i e^{-it}\,,$$

lo cual nos da la función primitiva de ie^{-it}*:* $\int ie^{-it}\,dt = -e^{-it}+C$*. El cálculo de la integral definida queda justificado por el Teorema fundamental del cálculo. Por supuesto, también podemos escribir* $ie^{-it} = \operatorname{sen} t + i\cos t$ *y después integrar cada término, obteniendo el mismo resultado final.*

Repaso de curvas planas

Caminos (trayectorias), curvas y trazas. Este material es básico y ya es conocido de otras asignaturas pero se incluye de forma detallada, con el fin de repasar las definiciones y propiedades básicas y también para acostumbrarse a la notación compleja, que es nueva.

Definición. Un camino en el plano es una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, donde $-\infty < a < b < +\infty$. (A veces también usaremos la palabra trayectoria.)

En Cálculo II, en Geometría de curvas y superficies y en Topología, entre otras asignaturas, ya vimos muchos ejemplos y propiedades de parametrizaciones, con $\mathbb{R}^2$ en lugar de $\mathbb{C}$. Como ya sabemos, es habitual hacer la identificación entre ambos conjuntos mediante la biyección natural $(x,y)\mapsto z = x+yi$. Por tanto, se trata del mismo concepto ya visto antes, sólo que ahora usaremos la notación compleja, escribiendo $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$ en lugar de $(x(t),y(t))$, para $t\in[a,b]$. Nos conviene acostumbrarnos a esta nueva notación.

Definición. Se dice que una parametrización $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ es equivalente a otra, $\Gamma : [c,d]\to\mathbb{C}$ si existe una función $\alpha : [a,b]\to[c,d]$, estrictamente creciente y suprayectiva (y, por tanto, biyectiva) tal que $\gamma = \Gamma\circ\alpha$.

Es muy fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia en la clase de todas las parametrizaciones.

Definición. Una curva es una clase de equivalencia respeto a esta relación.

Cada curva puede representarse mediante muchas parametrizaciones distintas. Como es habitual, podemos tomar como representante de una clase cualquiera de los caminos equivalentes que la componen. Si en lugar de una parametrización elegimos otra, se suele decir que hemos reparametrizado la curva y se suele referir a la función α como a un cambio de parámetro.

Es un abuso de terminología muy habitual decir que una función continua $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ es una curva, en lugar de decir que es un camino que representa la curva (su clase de equivalencia). De hecho, con frecuencia hablamos de un camino γ que representa cierta curva como de una parametrización de la curva. Emplearemos este lenguaje con frecuencia también en estos apuntes. Debería quedar claro por el contexto cuándo nos referimos a una curva y cuándo a una parametrización (camino).

Es importante destacar que la terminología aquí no es universal y algunos textos incluso usan la palabra “camino” como sinónimo de “curva”.

Ejemplo 3. *Las parametrizaciones* $\gamma(t) = r\,e^{it} = r\cos t + i r \operatorname{sen} t$, $t \in [0,2\pi]$ *y* $\Gamma(t) = r\,e^{2it} = r\cos 2t + i r \operatorname{sen} 2t$, $t \in [0,\pi]$ *son equivalentes, con* $[a,b] = [0,2\pi]$, $[c,d] = [0,\pi]$ *y la función creciente y suprayectiva* $\alpha(t) = t/2$, $\alpha : [0,2\pi] \to [0,\pi]$ *en la definición anterior. Por tanto, ambas parametrizaciones representan la misma curva, que nos imaginamos como el movimiento de una partícula con velocidad uniforme que recorre la circunferencia de radio* r *centrada en el origen* $\{z : |z| = r\}$ *(ya que* $|\gamma(t)| = r$*), completamente y una sola vez, en el sentido positivo (contrario al sentido de las manillas de reloj) empezando en el punto* $\gamma(0) = r$ *y terminando en el mismo punto.*

Para dos representaciones cualesquiera de la misma curva, digamos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\Gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$, con $\gamma = \Gamma \circ \alpha$ y $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente y suprayectiva, es evidente de la definición de caminos equivalentes que $\gamma([a,b]) = \Gamma([c,d])$. Por tanto, es correcto definir el siguiente concepto, ya que no depende de la parametrización de la curva.

Definición. La traza de una curva es el conjunto $\{\gamma\} = \gamma([a,b])$, para cualquier parametrización $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de la curva. El punto $\gamma(a)$ se denomina el punto inicial de la curva y $\gamma(b)$, el punto final.

A veces también se abusa de terminología, diciendo “curva” cuando realmente nos referimos a la traza. Evitaremos hacerlo en la medida de lo posible aunque a veces resulta más cómodo decirlo.

Ejemplo 4. *Con frecuencia decimos que la circunferencia* $C(0,r) = \{z : |z| = r\}$ *(*$r > 0$ *fijo) es una curva cuando, en realidad, es la traza de la curva* γ *dada por la función* $\gamma(t) = r\,e^{it} = r\cos t + i r \operatorname{sen} t \cong (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,2\pi]$. *Es decir, lo que realmente tenemos es que* $C(0,r) = \{\gamma\}$. *(Sin especificar la función* γ*, no sabemos cómo se recorre la traza en el tiempo.)*

Es claro que $\gamma_1(t) = r\,e^{-it} = r\cos t - i r \operatorname{sen} t \cong (r\cos t, -r\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,2\pi]$, *es otra curva diferente (porque no es la misma función) pero tiene la misma traza que* γ*:* $C(0,r) = \{\gamma_1\}$. *La función* γ *describe el movimiento (de velocidad uniforme) a lo largo de la circunferencia de radio* r *centrada en el origen en el sentido positivo mientras que* γ_1 *describe el movimiento(de velocidad uniforme) a lo largo de la misma circunferencia pero en el sentido negativo (el de las manillas de reloj).*

Definición. Se dice que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es simple si es inyectiva tanto en $[a,b)$ como en $(a,b]$. En otras palabras, si $a \le s < t \le b$ implica que o bien $\gamma(s) = \gamma(t)$ es imposible o bien sólo es posible cuando $s = a$ y $t = b$. Se dice que es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

En la definición de arriba hemos usado la palabra “curva” en lugar de “camino” (cometiendo el típico abuso de terminología) pero es fácil ver si las condiciones exigidas se piden para una parametrización de la curva, también se cumplen para cualquier otra parametrización equivalente a ella.

La idea intuitiva de una curva cerrada es que acaba donde empieza. Una curva simple no tiene autointersecciones; es decir, es imposible que pase por el mismo punto intermedio dos veces (pero sí pueden coincidir su punto inicial, $\gamma(a)$ y su punto final, $\gamma(b)$). Obsérvese que una propiedad no excluye a la otra. Por ejemplo, una circunferencia (recorrida sólo una vez, como en el Ejemplo 4) es una curva simple y cerrada.

Curvas rectificables y suaves a trozos. Sólo con la hipótesis $\gamma \in C[a,b]$ no podemos siempre obtener lo que se corresponde intuitivamente con nuestra noción de curva. Existen, por ejemplo, curvas tales que $\gamma([a,b])$ es un cuadrado u otros conjuntos similares (típicamente llamadas *curvas de Peano*).

Para evitar esos fenómenos "patológicos", es habitual pedir más condiciones que una curva ha de cumplir. Puede pedirse que γ tenga derivada en todos los puntos de $[a,b]$ salvo en un conjunto finito de puntos, aunque eso no evita todos los problemas posibles (porque la derivada podría no estar acotada cerca de algunos puntos). Alternativamente, puede pedirse que la curva sea rectificable (o de longitud finita), lo cual intuitivamente viene a decir que se puede aproximar bien por líneas poligonales, tal y como sugiere la siguiente definición.

Definición. Se dice que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es <u>rectificable</u> (o que <u>tiene longitud finita</u>) si

$$\ell(\gamma) = \sup_P \sum_{k=0}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < +\infty, \tag{1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_{n-1} < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. El número $\ell(\gamma)$ se denomina <u>longitud</u> de la curva γ.

Una función que cumple la condición del supremo finito arriba se dice que es de *variación acotada* pero aquí no discutiremos esta clase de funciones (muy importantes, por cierto) en detalle. (Para las personas con cierto interés en Análisis real y Análisis funcional, mencionamos sólo que el espacio lineal de funciones de variación acotada en $[a,b]$ está estrechamente relacionado con el espacio dual de las funciones continuas $C[a,b]$, debido a uno de los teoremas de representación de Riesz.)

En esta asignatura nos contentaremos con alguna propiedad más fuerte que la propiedad de ser rectificable pero de suficiente utilidad para nuestro propósito. Por ejemplo, en numerosos contextos se considera el concepto de una <u>curva C^1</u> (o <u>curva suave</u> o <u>lisa</u>): $\gamma \in C^1[a,b]$, es decir, $\gamma' \in C[a,b]$. Es suficiente considerar una condición más general.

Definición. Se dice γ es una <u>curva suave a trozos</u> (o <u>C^1 a trozos</u>) si $\gamma \in C[a,b]$ y, además, satisface las siguientes condiciones:

- $\gamma'(t)$ existe (como valor finito) en todo $t \in [a,b]$, salvo posiblemente en un conjunto finito de puntos $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, donde $a < t_1 < t_2 < \dots < t_m < b$;
- γ' es continua en cada uno de los intervalos $[a, t_1)$, (t_1, t_2),..., (t_{m-1}, t_m), $(t_m, b]$;
- existen todos los límites laterales (finitos) $\lim_{t\to t_k^-} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to t_k^+} \gamma'(t)$, para $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Ejemplo 5. *Una curva suave a trozos (consideraremos con frecuencia ejemplos similares) es la siguiente:* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$*, donde*

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, & si\, 0 \le t \le \pi, \\ \frac{2t}{\pi} - 3, & si\, \pi \le t \le 2\pi, \end{cases},$$

la semicircunferencia superior de la circunferencia unidad, desde $z = 1$ *hasta* $z = -1$*, unida con el segmento* $[-1, 1]$ *y trazada en el sentido positivo. En este caso,* $m = 1$ *y* $t_1 = \pi$ *en la definición anterior.*

Obsérvese que $\gamma(\pi) = -1$ según ambas fórmulas, luego γ está bien definida y es continua, puesto que los límites laterales $\lim_{t\to\pi^-}\gamma(t) = \lim_{t\to\pi^-} e^{it} = -1$ y $\lim_{t\to\pi^+}\gamma(t) = \lim_{t\to\pi^+} \frac{2t}{\pi} - 3 = -1$ coinciden con $\gamma(\pi)$. Por tanto, γ es un camino.

Para el cálculo de γ', véase el Ejemplo 1. Es claro que γ' es discontinua en $t = \pi$ ya que los límites laterales de la derivada son $\gamma'(\pi^-) = -i$, $\gamma'(\pi^+) = 2/\pi$. Por tanto, no es una curva suave (intuitivamente, no tiene tangente y tiene una "esquina" en $z = -1$) pero sí es suave a trozos.

Definición. Usaremos con frecuencia la palabra contorno para referirnos a una curva C^1 a trozos, simple y cerrada.

La curva del Ejemplo 5 es suave a trozos, simple y cerrada puesto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$. Por tanto, es un contorno.

El siguiente resultado es intuitivamente obvio pero muy laborioso de probar. A veces se demuestra en el curso de Topología.

Teorema. (Jordan) Si γ es un contorno, entonces $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ es un conjunto abierto con dos componentes conexas: un dominio acotado y otro dominio no acotado. El dominio acotado por γ se denomina el dominio interior y el no acotado, dominio exterior.

En el Ejemplo 5, el dominio interior al contorno γ es un semidisco abierto.

A partir de la definición (1), puede demostrarse el siguiente resultado conocido de otras asignaturas, escribiendo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Teorema. Toda curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es rectificable y su longitud viene dada por la fórmula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt. \tag{2}$$

Más generalmente, toda curva suave a trozos es rectificable y (suponiendo las mismas condiciones que las indicadas en la definición anterior), su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^{t_1} |\gamma'(t)|\, dt + \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|\, dt + \ldots + \int_{t_{m-1}}^{t_m} |\gamma'(t)|\, dt + \int_{t_m}^{b} |\gamma'(t)|\, dt,$$

Cuando γ no es suave pero es suave a trozos, es obvio de las condiciones impuestas sobre γ implican que cada una de las integrales en el lado derecho de la última igualdad es finita.

Ejemplo 6.

La longitud de la curva del Ejemplo 5 es, obviamente, $\pi + 2$ (aplicando consideraciones geométricas elementales). La fórmula (2) del Teorema lo confirma:

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{\pi} |ie^{it}|\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2}{\pi}\, dt = \pi + 2. \tag{3}$$

Es importante observar que, al considerar dos parametrizaciones equivalentes, γ y Γ, de la misma curva que es o bien suave o bien C^1 a trozos, siempre podemos suponer que la función α (cambio de parámetro) es también una función suave o C^1 a trozos. Entonces es fácil ver que la longitud es la misma para cualquier otra parametrización de una curva suave; en efecto, la fórmula para $\ell(\gamma)$ adquiere la misma forma después de un cambio monótono de variable.

Integrales de línea complejas

A partir de ahora, consideraremos una versión de las integrales de línea, algo más general que las ya vistas en Cálculo II y Análisis Matemático, esta vez con valores complejos.

Integrales de línea complejas. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva C^1 a trozos y f es una función compleja, continua en $\{\gamma\}$, la traza de γ, definiremos la integral de f a lo largo de γ como

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt,$$

entendiendo la multiplicación dentro de la integral como la multiplicación en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Puesto que γ es C^1 a trozos, la interpretación en términos de la integral de Riemann será

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt,$$

siendo $t_1,\dots,t_n$ los puntos de discontinuidad de la derivada γ'.

Ejemplo 7. *Sea $f(z) = \frac{1}{z^2}$ y $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ la curva dada por $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ (la semicircunferencia superior de la circunferencia unidad, desde $z = 1$ hasta $z = -1$, trazada en el sentido positivo. Puesto que f es holomorfa en el plano agujereado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, en particular es continua en la traza de γ: $\{\gamma\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$. Por tanto, existe la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$. Además, no es difícil calcularla como sigue.*

Formalmente, para $z \in \{\gamma\}$, escribimos $z = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, derivamos z respecto a t: $dz = ie^{it}\,dt$ (tal y como hemos establecido en el Ejemplo 1) y luego calculamos

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{2it}} ie^{it}\,dt = \int_0^\pi ie^{-it}\,dt = (-e^{-it})\Big|_0^\pi = 2.$$

Recuérdese que en el Ejemplo 2 ya hemos justificado el cálculo de la primitiva de ie^{-it} y la evaluación de la integral de Riemann en la fórmula anterior.

Propiedades básicas de las integrales de línea. Veremos que las integrales de línea complejas tienen, esencialmente, las mismas propiedades que las integrales de línea reales vistas en los cursos previos.

¿Por qué ocurre esto? Porque, escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z)$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, tenemos que $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y, por tanto, multiplicando dentro de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \big(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \big(u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)\big)\,dt \\
&= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx,
\end{aligned}$$

así que toda integral de línea compleja es una combinación lineal compleja de dos integrales de líneas reales (vistas antes en Cálculo II y en Análisis Matemático). De ahí que se preserven muchas propiedades de las integrales de línea vistas anteriormente. Aún así, indicaremos algunas demostrarciones pertinentes en lugar de simplemente dar un listado de propiedades.

Una propiedad básica de las integrales de línea es la $\mathbb{C}$-linealidad, algo natural para una integral compleja. La prueba se sigue directamente de la definición.

Proposición. Si γ es una curva C^1 a trozos, f y g dos funciones continuas en su traza $\{\gamma\}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ dos constantes, entonces

$$\int_\gamma \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\,dz = \lambda\int_\gamma f(z)\,dz + \mu\int_\gamma g(z)\,dz.$$

Otra propiedad que cabe esperar es la independencia de la parametrización.

Proposición. Si γ y Γ son dos parametrizaciones equivalentes de una misma curva C^1 a trozos, f una función continua en su traza $\{\gamma\} = \{\Gamma\}$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Aplicando primero la definición, luego la relación $\gamma = \Gamma \circ \alpha$, con $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente, suprayectiva y C^1 a trozos, después el cambio de variable $\alpha(t) = s$, $ds = \alpha'(t)\,dt$, obtenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\Gamma(\alpha(t)))\Gamma'(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int_c^d f(\Gamma(s))\Gamma'(s)\,ds = \int_\Gamma f(z)\,dz. \qquad \blacksquare$$

Definición. Dada una curva, representada por un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, la <u>curva con orientación opuesta</u> es la curva representada por la parametrización

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma^-(t) = \gamma(b + a - t).$$

Debe notarse que las parametrizaciones γ y γ^- <u>no</u> son equivalentes en el sentido de la definición vista antes. Aunque es fácil ver que las trazas son la misma: $\{\gamma^-\} = \{\gamma\}$, intuitivamente, γ^- se recorre en el sentido opuesto, empezando en $\gamma(b)$ (para $t = a$) y terminando en $\gamma(a)$ (para $t = b$). Teniendo en cuenta que $e^{i(2\pi-t)} = e^{-it}$ y comparando las parametrizaciones γ y γ_1 del Ejemplo 4, es fácil ver que, de hecho, $\gamma_1 = \gamma^-$.

La siguiente fórmula es la típica propiedad relativa al cambio de orientación: cuando la curva se recorre en el sentido contrario, cambia el signo de la integral.

Proposición. Si γ y γ^- son dos curvas C^1 a trozos con orientaciones opuestas y f una función continua en su traza $\{\gamma\} = \{\gamma^-\}$, entonces

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Se sigue directamente de la definición de la integral de línea, empleando el simple cambio de variable $s = b + a - t$. ■

En Topología ya hemos definido la suma de dos curvas.

Definición. Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\Gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ dos curvas tales que $\gamma(b) = \Gamma(c)$. La suma $\gamma + \Gamma$ se define como la curva dada por

$$\gamma + \Gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}, \qquad (\gamma+\Gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \le t \le b, \\ \Gamma(t+c-b), & \text{si } b \le t \le b+d-c, \end{cases} .$$

Intuitivamente, donde termina γ, empieza Γ. Las dos juntas forman $\gamma + \Gamma$. La curva del Ejemplo 5 es un claro ejemplo de la suma de dos curvas suaves.

Proposición. Si γ y Γ son dos curvas C^1 y f una función continua en la traza $\{\gamma + \Gamma\}$, entonces

$$\int_{\gamma+\Gamma} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. □ La comprobación es directa, separando la integral en dos y aplicando el cambio de variable $s = t + c - b$ en la segunda integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma+\Gamma} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\Gamma(t+c-b))\,\Gamma'(t+c-b)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_c^d f(\Gamma(t))\,\Gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Mencionamos que la suma de curvas se puede considerar como un concepto formal incluso cuando las curvas tienen trazas disjuntas. La Proposición sigue siendo válida en esos casos.

Otra observación importante es que, puesto que la integral sobre cada trozo de la suma de dos curvas se puede calcular por separado, cuando sea conveniente, podremos reparametrizar la curva para obtener una integral más simple y unos cálculos más sencillos. Así pues, en el Ejemplo 5, podríamos haber parametrizado el segundo tramo de la curva (el segmento desde -1 hasta 1) simplemente como

$$\Gamma(t) = t, \qquad -1 \le t \le 1,$$

obteniendo su longitud por la cuenta alternativa (observando que $\Gamma'(t) = 1$):

$$\ell(\Gamma) = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2,$$

el mismo resultado que en la segunda integral en (3). Este procedimiento de elegir una parametrización simple y cómoda nos ayudará a simplificar los cálculos en numerosas ocasiones, cuando la parametrización dada es relativamente complicada o cuando la parametrización ni siquiera está escrita (típicamente, cuando la curva se describe sólo verbalmente en el enunciado).

Estimaciones de integrales de línea. Aplicaciones

Las estimaciones que daremos a continuación continúan la lista de propiedades básicas de las integrales de línea pero, en cierto modo, tienen entidad propia, debido a sus aplicaciones que también cubriremos en esta sección y que volveremos a usar en las posteriores entregas de apuntes.

El siguiente resultado preliminar es una generalización de la conocida desigualdad para las integrales de funciones reales y su valor absoluto. No obstante, es importante notar que no se puede deducir directamente de ella sin hacer un trabajo equivalente al de la demostración (obsérvese con cuidado la segunda formulación de la desigualdad -con raíces- para ver que es muy diferente).

Lema 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{4}$$

En otras palabras, si $f = u + iv$, con u y v funciones reales, entonces

$$\sqrt{\left(\int_a^b u(t)\, dt\right)^2 + \left(\int_a^b v(t)\, dt\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}\, dt.$$

DEMOSTRACIÓN. □ Distinguimos entre dos casos. Si $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, la desigualdad es trivialmente cierta. Por tanto, nos podemos centrar en el caso restante: $\int_a^b f(t)\, dt \ne 0$, lo cual significa que es un número complejo que tiene argumento. Sean

$$\theta = \operatorname{Arg}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right), \qquad g(t) = e^{-i\theta} f(t), \quad a \le t \le b.$$

Recordando que para cualquier número complejo $z \neq 0$ se cumple la igualdad $|z| = e^{-i\operatorname{Arg} z} z$ (directamente de su representación polar), vemos que

$$0 < \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Así que cada una de las integrales en la última igualdad es un número real y positivo y, por consiguiente, coincide con su parte real:

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \operatorname{Re}\left(\int_a^b g(t)\,dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

En la segunda igualdad hemos usado el hecho obvio de que

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b (U(t) + iV(t))\,dt \right) = \int_a^b U(t)\,dt$$

y en la desigualdad siguiente, la conocida desigualdad $\operatorname{Re} g(t) \leq |g(t)|$, para cada $t \in [a, b]$. El lema queda probado. ■

En lo que sigue, γ será una curva C^1 a trozos, parametrizada de la siguiente manera: $z = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. (No pedimos que sea ni simple ni cerrada pero, por supuesto, tampoco excluimos esos casos.) Ya hemos definido que $dz = \gamma'(t)\,dt$ y ahora usaremos la siguiente notación:

$$|dz| = |\gamma'(t)|\,dt\,.$$

En otras asignaturas, posiblemente, no se hayan tratado las formas diferenciales de manera rigurosa y aquí tampoco profundizaremos en ellas. En todo caso, la igualdad anterior es completamente natural dado que, para $z = \gamma(t)$, tenemos que $|\frac{dz}{dt}| = |\gamma'(t)|$. Entenderemos, por tanto, que

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\,.$$

Esta notación se usará con frecuencia de aquí en adelante. Obviamente, en el caso particular $f \equiv 1$, obtenemos

$$\int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \ell(\gamma)\,,$$

la longitud de la curva γ. Con esta notación, tenemos la siguiente estimación básica para las integrales de línea.

Proposición. Si γ es una curva C^1 a trozos, f una función continua en su traza $\{\gamma\}$, entonces

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,. \tag{5}$$

En particular, si M es una constante tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma$ (por ejemplo, $M = \text{máx}_{z\in\gamma} |f(z)|$), entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\int_\gamma |dz| = M\cdot \ell(\gamma)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. ☐ La desigualdad (5) se sigue en virtud del Lema 1 de

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,.$$

La otra desigualdad es inmediata. ■

Utilizaremos la Proposición con frecuencia. Comenzaremos con un ejemplo muy simple. Es importante observar que la acotación conseguida abajo no es única y tampoco se afirma que sea la más precisa posible.

Ejemplo 8. *Sea γ el segmento vertical $[1-i, 1+i]$, recorrido desde abajo hacia arriba. Vamos a dar una posible estimación del valor de $\left|\int_\gamma e^{-z}\,dz\right|$.*

Por supuesto, podemos parametrizar el segmento, por ejemplo, $z = \gamma(t) = 1 + it$, $-1 \le t \le 1$, pero no es necesario hacer cálculos. Observando que para todo z así se tiene que $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} = e^{-1}$, según la estimación básica (5), obtenemos

$$\left|\int_\gamma e^{-z}\,dz\right| \le \int_\gamma \left|e^{-z}\right|\,|dz| = e^{-1}\ell(\gamma) = \frac{2}{e}\,.$$

Volveremos a usar la estimación básica (5) cuando hablemos de la integración sobre contornos, en una de las próximas entregas de los apuntes.

El siguiente resultado será importante en diversas aplicaciones. Lo que nos dice es que, una vez más, en este contexto también la convergencia uniforme permite intercambiar la integral y el límite.

Teorema. Sea γ una curva suave a trozos y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones (reales o complejas) continuas en la traza $\{\gamma\}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en $\{\gamma\}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

DEMOSTRACIÓN. ☐ Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $f_n \rightrightarrows f$ en $\{\gamma\}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in \{\gamma\}$ y para todo $n \ge N_0$ se tiene

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}\,.$$

Usando la Proposición , vemos que

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\,dz\right| \le \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}\cdot \ell(\gamma) = \varepsilon$$

para todo $n \ge N_0$, lo cual demuestra el teorema. ■

El siguiente corolario es inmediato y muy útil.

Corolario. Sea γ una curva suave a trozos y supongamos que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones continuas converge uniformemente en la traza $\{\gamma\}$. Entonces

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz\,.$$

En la siguiente entrega de apuntes, usaremos este corolario en la demostración de alguna de las distintas versiones de la Fórmula integral de Cauchy, uno de los teoremas centrales de este curso.

Preparado por Dragan Vukotić, UAM