Variable Compleja I **(CURSO 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Convergencia de sucesiones y series funcionales (marzo de 2023)

En estos apuntes consideraremos los distintos tipos de convergencia de funciones holomorfas (que también se pueden formular para otras funciones complejas, más generales). En los cursos anteriores ya vimos las convergencias puntual y uniforme de funciones reales (que se definirán de forma totalmente análoga en este nuevo contexto). Recordaremos que la continuidad de funciones no se preserva en el caso de los límites que son sólo puntuales pero sí se conserva bajo convergencia uniforme.

En Variable Compleja, el objetivo será preservar la holomorfía al aplicar el límite a una sucesión de funciones holomorfas. La necesidad de este planteamiento ya se mostrará de forma parcial en el curso actual. Veremos que la convergencia puntual, de nuevo, dista mucho de ser suficiente. Por otra parte, exigir la convergencia uniforme en todo el dominio supondría pedir demasiado (porque entonces tendríamos pocos ejemplos de sucesiones deseadas). No obstante, el concepto intermedio de convergencia uniforme en subconjuntos compactos del dominio resultará muy adecuado, como quedará plasmado en un teorema de Weierstrass que se estudiará detalladamente en el curso de Variable Compleja II y que aquí sólo se mencionará.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A. Se dice que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función f en el conjunto A si, para todo $z \in A$, la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ de números complejos converge al número complejo $f(z)$ cuando $n \to \infty$.

Usando $d(z,w)$ en lugar de $|z-w|$, es fácil adaptar esta definición a un contexto mucho más general: el de espacios métricos.

Ejercicio 1. *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$ converge puntualmente a:*

(a) 0 si $|z| < 1$;

(b) a 1 cuando $z = 1$;

(c) a ∞ (en el plano extendido $\hat{\mathbb{C}}$) para $|z| > 1$;

SOLUCIÓN. $\square$ (a) Sabemos de Cálculo I que si $0 \le r < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Por tanto, si $r = |z| < 1$, vemos que $|z^n| = r^n \to 0$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

(b) Trivial.

(c) Sabemos de Cálculo I que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ cuando $q \in \mathbb{R}$ y $q > 1$. Si $|z| > 1$ entonces $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, lo cual significa por definición que $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ (en el plano complejo extendido).$\blacksquare$

Es importante recordar que en el plano complejo extendido sólo hay un infinito. Por definición, $z_n \to \infty$ en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si y sólo si $|z_n| \to +\infty$ en la recta real extendida. Aunque, por ejemplo, $-n^n \to -\infty$ en la recta real extendida, puesto que tenemos $|-n^n| = n^n \to +\infty$, por definición, entendemos que $-n^n \to \infty$ en el plano complejo extendido, $\hat{\mathbb{C}}$. Lo mismo ocurre para $(ni)^n$ y otras muchas sucesiones.

Ejercicio 2. *Demuestre que la misma sucesión del ejemplo anterior diverge si $|z| = 1$ y $z \neq 1$ (en otras palabras, (no tiene límite ni finito ni infinito).*

SOLUCIÓN. $\square$ Equivalentemente, veremos que $|z| = 1$ junto con la hipótesis de convergencia de z^n a un valor implica que $z = 1$. Hay, por lo menos, dos maneras de ver esto.

Una demostración, breve y sencilla, es la siguiente. Supongamos lo contrario: que para cierto z con $|z| = 1$ existe el límite $z_0 = \lim_{n\to\infty} z^n$. Entonces también $z_0 = \lim_{n\to\infty} z^{n+1}$. Puesto que $|z| = 1$, se sigue que $z^n \neq 0$ y $|z_0| = 1$ y, por tanto, $z_0 \neq 0$. Luego

$$z = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0}{z_0} = 1\,.$$

Conclusión: cuando $|z| = 1$, la sucesión z^n sólo puede ser convergente si $z = 1$, el caso trivial ya considerado antes.

Otra demostración, más larga y más complicada pero también instructiva y que se puede saltar en una primera lectura de estos apuntes, es como sigue. Sea $z = e^{it}$. Entonces $z^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$, por la fórmula de A. de Moivre. Si esta sucesión compleja converge, entonces también convergen las sucesiones reales $x_n = \cos nt$, $y_n = \operatorname{sen} nt$. Veremos que esto sólo es posible cuando $e^{it} = 1$. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Entonces también $x = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_{2n}$. Eso significa que

$$x_{2n} = \cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1 = 2x_n^2 - 1\,, \qquad y_{2n} = \operatorname{sen} 2nt = 2 \operatorname{sen} nt \cos nt = 2x_n y_n\,.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$x = 2x^2 - 1\,, \qquad y = 2xy\,.$$

De la segunda igualdad se sigue que o bien $y = 0$ o bien $x = 1/2$. Como el valor $x = 1/2$ no satisface la condición $x = 2x^2 - 1$, se sigue que $y = 0$. Puesto que la identidad básica $\cos^2 nt + \operatorname{sen}^2 nt = 1$ implica $x^2 + y^2 = 1$, concluimos que $x = 1$ ó $x = -1$. De nuevo, $x = -1$ incumple $x = 2x^2 - 1$, así que $x = 1$. Por lo tanto, hemos llegado a la conclusión de que $\cos nt \to 1$, $\operatorname{sen} nt \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Usando esta última conclusión y tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$x_{n+1} = \cos(nt + t) = \cos nt \cos t - \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $1 = \cos t$, mientras que tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$y_{n+1} = \operatorname{sen}(nt + t) = \operatorname{sen} nt \cos t + \cos nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $0 = \operatorname{sen} t$ y, por tanto, $z = e^{it} = 1$, que es lo que queríamos demostrar. $\blacksquare$

La convergencia puntual puede formularse en los términos habituales de épsilon y delta como sigue:

$$\forall z \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Inviertiendo algunos de los cuantificadores y pidiendo que N dependa sólo de ε y no de $z \in A$, obtenemos una definición diferente, ya conocida del contexto de funciones reales.

Definición. Diremos que la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall z \in A \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

En este caso, escribiremos $f_n \rightrightarrows f$ en A o, alternativamente, $f_n \rightrightarrows_A f$.

Es irrelevante si en la definición anterior ponemos la desigualdad estricta ($< \varepsilon$) o no ($\leq \varepsilon$) porque es fácil comprobar que ambas definiciones son equivalentes. Obsérvese que la formulación de convergencia uniforme con $\leq \varepsilon$ es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon .$$

En otras palabras, $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ en } A \text{ si y sólo si } \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty}$. Este criterio es muy útil. Todo lo que tenemos que hacer es obtener una cota adecuada para la cantidad no negativa $|f_n(z) - f(z)|$ que sea pequeña y no dependa de z.

Ejercicio 3. *Compruebe que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente a cero en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D}(0,1) = \{z : |z| \leq 1\}$.*

SOLUCIÓN. ☐ Es evidente que

$$\left| \frac{z^n}{n} - 0 \right| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{n} ,$$

para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Por tanto,

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \left| \frac{z^n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Se sigue que $\frac{z^n}{n} \rightrightarrows 0$ en $\overline{\mathbb{D}}$ cuando $n \to \infty$.

Aunque eso no forma parte del ejercicio, podríamos preguntarnos por qué no analizamos ningún tipo de convergencia para los valores de z fuera de $\overline{\mathbb{D}}$. Para entenderlo, observemos que si $|z| = R > 1$, entonces

$$\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{R^n}{n} \to +\infty$$

y, por tanto $\frac{z^n}{n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$. El último límite se puede justificar, por ejemplo, por la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log R \cdot R^x = +\infty ,$$

al ser $R > 1$. ■

Ejercicio 4. *Compruebe que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$ NO converge uniformemente en el disco unidad $\mathbb{D} = D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$.*

SOLUCIÓN. $\square$ Como ya sabemos del Ejemplo 1, la sucesión $f_n(z) = z^n \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$, así que sólo tenemos que examinar si $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \to 0$ o no cuando $n \to \infty$. Por definición, el supremo de un conjunto es mayor o igual que cualquier valor del conjunto, así que, eligiendo $z = 1-(1/n)$, vemos que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^n \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)|\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Se sigue que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \not\to 0$, así que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{D}$. $\blacksquare$

Es un fenómeno muy frecuente en Análisis que algunas sucesiones de funciones, puntualmente convergentes a cierta función, no sean uniformemente convergentes en todo el dominio Ω pero sí en cada uno de los subconjuntos compactos de Ω. La notación $K \Subset \Omega$ para denotar que K es un subconjunto compacto del abierto Ω se usa con cierta frecuencia en las disciplinas como Variable Compleja o Ecuaciones en Derivadas Parciales. La usaremos aquí también.

Ejercicio 5. *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$ converge a 0 uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;*

SOLUCIÓN. $\square$ Sea $K \Subset \mathbb{D}$. Puesto que K es cerrado y acotado, es fácil ver que existe un número R, $0 < R < 1$, tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq R$. Este detalle MUY IMPORTANTE se justifica como sigue: la función $u(z) = |z|$ es continua y, por tanto, alcanza su máximo en el compacto K, digamos en un punto $z_0 \in K$. Si dicho máximo fuera igual a uno, tendríamos $|z_0| = 1$ y entonces $z_0 \not\in \mathbb{D}$, luego $z_0 \not\in K$, lo cual es absurdo. Por tanto, el máximo $R = \max_{z\in K} |z| < 1$.
Una vez establecida la existencia del valor $R < 1$ asociado con K, procedemos como sigue. Si $z \in K$, entonces $|z^n| = |z|^n \leq R^n$ así que

$$\sup_{z\in K} |z^n - 0| \leq R^n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Por lo tanto, $z^n \rightrightarrows_K 0$. $\blacksquare$

Proposición. Si $f_n \rightrightarrows_A f$ y las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces f también es continua en A.

DEMOSTRACIÓN. $\square$ Usamos el mismo razonamiento que para las funciones reales y que, de hecho, fácilmente se puede adaptar al caso de espacios métricos.

Si $a \in A$ es un punto arbitrario, vamos a demostrar que f es continua en a; en otras palabras, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in A$ con $|z-a| < \delta$ se tiene que $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Partiendo de la hipótesis de que $f_n \rightrightarrows_A f$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in A$ se cumple la desigualdad $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$. En particular, esto también se cumple para $z = a$. Por otra parte, también sabemos que f_N es continua en a y, por tanto, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in A$ con $|z-a| < \delta$ se tiene que $|f_N(z) - f_N(a)| < \varepsilon/3$. Por tanto, cuando $z \in A$ y $|z-a| < \delta$, se sigue que

$$|f(z) - f(a)| \le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

En el curso de Variable Compleja II veremos el siguiente resultado que tiene cierta similitud con el anterior. En este momento, no tenemos suficientes herramientas para demostrarlo y, además, no forma parte de los contenidos del curso actual, aunque veremos algunos casos especiales cuando consideremos las series de potencias.

Teorema. (Weierstrass) Sea Ω un dominio en el plano y supongamos que $f_n \rightrightarrows_K f$ para todo $K \Subset \Omega$, donde las funciones f_n son todas holomorfas en Ω. Entonces f también es holomorfa en Ω.

Conviene observar que, para un dominio Ω, la convergencia uniforme en Ω implica la convergencia en subconjuntos compactos en Ω y ésta implica la convergencia puntual pero que ninguna de las implicaciones recíprocas es cierta. En resumen, el concepto de convergencia uniforme en subconjuntos compactos de un dominio, como concepto intermedio entre la convergencia puntual y la uniforme, es el correcto para preservar la holomorfía de funciones, gracias al teorema citado de Weierstrass. De ahí su gran importancia en el área de Variable Compleja, que se verá en el siguiente curso (optativo).

Convergencia de series numéricas

Antes de hablar de las series funcionales, veamos algunos detalles básicos relativos a la convergencia de series de números complejos. Empezamos por la definición más básica.

Definición. Sean $z_n \in \mathbb{C}$, para $n \in \mathbb{N}$. Diremos que la <u>serie compleja</u> $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>converge</u> si converge la sucesión de sus sumas parciales, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$, siendo

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

(Como siempre, se aplican las modificaciones obvias en las sumas parciales para las series como $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=3}^{\infty} z_n$ y otras similares.)

Proposición. Si $z_n = a_n + i b_n$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, entonces la serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si convergen ambas series reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Omitimos la demostración ya que es inmediata, interpretando la convergencia de la suma en términos de la convergencia de las sumas parciales y recordando que la parte real de una suma finita es la suma de las partes reales (y lo mismo para la parte imaginaria).

Al igual que para las series reales, es fácil demostrar que si una serie compleja converge, entonces su término general $z_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Por supuesto, el recíproco es falso, como antes; podemos usar los mismos contraejemplos con series de números reales como $\sum_n \frac{1}{n}$.) Por tanto, este criterio básico fundamentalmente sirve para comprobar que una serie es divergente.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ diverge puesto que su término general $i^n \not\to 0$: en efecto, es inmediato ver que $|i^n| = |i|^n = 1$.

Los números complejos forman un espacio métrico completo, con la misma topología que $\mathbb{R}^2$. Por tanto, todas las sucesiones de Cauchy de números complejos convergen. Como en Cálculo, eso nos permite probar el siguiente criterio para las series infinitas, que contiene como caso especial el del término general ($k = 1$).

Proposición. (*Criterio de Cauchy*) La serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq N_0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} z_j \right| < \varepsilon .$$

DEMOSTRACIÓN. □ Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_n)_n$ converge y eso sucede si y sólo si $(S_n)_n$ es una sucesión de Cauchy. La última condición se traduce exactamente en la condición dada arriba (da igual si tomamos la suma desde N o desde $N+1$, son modificaciones ligeras). ■

Definición. La serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>converge absolutamente</u> si converge la serie asociada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ de números reales y positivos.

Escribiendo $z_n = a_n + i b_n$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, la convergencia absoluta significa la convergencia de la serie real y positiva $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

Al igual que en Cálculo I (para las series de números reales), tenemos el siguiente resultado.

Proposición. Si una serie converge absolutamente, entonces converge. Además, su suma satisface la desigualdad

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| .$$

DEMOSTRACIÓN. □ Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces converge la serie de números no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Por el criterio de Cauchy, concluimos que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{j=N+1}^{N+k} |z_j| < \varepsilon .$$

Aplicando la desigualdad triangular generalizada: $\left| \sum_{j=N+1}^{N+k} z_j \right| \leq \sum_{j=N+1}^{N+k} |z_j|$, se sigue la conclusión sobre la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, por la otra implicación en el criterio de Cauchy.

Finalmente, observemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{N} |z_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando $N \to \infty$ y usando la continuidad de la función $z \mapsto |z|$, se sigue que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z_n\right| = \lim_{N\to\infty} \left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \qquad \blacksquare$$

ADVERTENCIAS. Finalizamos esta sección con algunas observaciones importantes.

En el cuerpo de los números complejos, no hay ningún orden natural como en $\mathbb{R}$ que sea compatible con la estructura algebraica, como tampoco lo hay en $\mathbb{R}^2$. (Por supuesto, existe el orden lexicográfico, ya considerado en Topología, pero aquí no es de interés.) Por tanto, para dos números complejos z y w que no sean reales, *no tiene sentido* decir que $z < w$. Por ejemplo, jamás se debe escribir algo como $2+3i \ge 1-i$ o similar.

Del mismo modo, *nunca se debe escribir* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty$ cuando se quiere decir que la serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (aunque sea convergente). Eso sólo tiene sentido cuando todos los z_n son números reales y positivos.

Errores de este tipo son considerados como graves en los exámenes.

Convergencia de series funcionales

Con frecuencia nos interesa considerar la convergencia de series de funciones. Como es lógico, ésta se interpreta en términos de la convergencia de las sumas parciales asociadas a la serie.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y S, $f_n : A \to \mathbb{C}$. Diremos que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ a la función S si las sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ convergen uniformemente a $S(z)$ en A.

Si eso ocurre, como es de costumbre, diremos que $S(z)$ es la suma de la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Proposición. (*Criterio del término general*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$, entonces $f_n \rightrightarrows_A 0$.

DEMOSTRACIÓN. $\square$ Sean, como antes, $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$, $N \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $S_n(z) \rightrightarrows_A S(z)$, $n \to \infty$. Entonces también $S_{n-1}(z) \rightrightarrows_A S(z)$. Por tanto,

$$f_n(z) = S_n(z) - S_{n-1}(z) \rightrightarrows_A S(z) - S(z) = 0. \qquad \blacksquare$$

El siguiente criterio es muy útil para demostrar la convergencia uniforme de una serie. En la literatura matemática en inglés se conoce como el "M-test" de Weierstrass, en alusión a la presencia de las constantes M_n en la acotación.

Teorema. (*Criterio de comparación de Weierstrass)* Si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in A$, se cumple $|f_n(z)| \le M_n$ y la serie de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para todo $z \in A$ y su suma satisface la desigualdad

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|.$$

Observación. El criterio de Weierstrass sólo nos permite concluir que la serie converge pero no nos da ninguna información acerca del valor de la suma. En el enunciado, no es necesario que la desigualdad en la hipótesis se cumpla para todo n; basta con que sea cierto para todo $n \ge N_0$, con un $N_0 \in \mathbb{N}$ fijo.

DEMOSTRACIÓN. □ Para ver que la serie converge absoluta y uniformemente, hemos de ver que las sumas parciales correspondientes convergen. Para ello, basta ver que la cola de la serie con módulos converge uniformemente a cero: $\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \rightrightarrows_A 0$, cuando $N \to \infty$. Esto se sigue de

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \to 0, \quad N \to \infty,$$

debido a la convergencia de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. ■

Ejercicio 6. *Demostrar que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ *diverge para todo* z *con* $|z| > 1$ *y converge uniformemente en el disco cerrado* $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D}(0;1) = \{z : |z| \le 1\}$.

SOLUCIÓN. □ La divergencia para $|z| > 1$ se justifica exactamente como al final del Ejercicio 3.
Veamos la convergencia uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$.
Puesto que $|z| \le 1$, se sigue que $|\frac{z^n}{n^2}| \le \frac{1}{n^2} (= M_n)$. Dado que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, podemos aplicar el Criterio de comparación de Weierstrass para deducir que nuestra serie funcional converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$. ■

La Proposición de la sección anterior (sobre la continuidad del límite uniforme de funciones continuas), aplicada a las sumas parciales de la serie, nos da la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario. Si las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y la serie funcional $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente en A a la suma $S(z)$, entonces S es también una función continua en A.

De este resultado y del Ejercicio 6 se deduce que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, definida para $|z| \le 1$, es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, ¡aunque no conozcamos la suma de la serie! Un poco más adelante, incluso seremos capaces de calcular el valor exacto de esta suma, expresado en términos de una función elemental y veremos en qué puntos es holomorfa.

Ejercicio 7. *¿Para qué valores de* $z \in \mathbb{C}$ *converge la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$*? ¿En qué sentido converge?*

SOLUCIÓN. $\square$ Si la serie converge para un valor de z, entonces el término general $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Según el resultado de los Ejercicios 1 y 2, para que esto ocurra se tiene que cumplir la condición $|z| < 1$.
Veamos ahora que la serie converge en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$; esto es, para todos los valores indicados.

Puesto que no es cierto que $z^n \rightrightarrows 0$ en $\mathbb{D}$ (tal y como hemos visto en el Ejercicio 4), por el criterio del término general se sigue que la serie no converge uniformemente en todo el disco unidad abierto $\mathbb{D}$. También podemos usar el mismo razonamiento que en el Ejercicio 3 con el supremo y el valor $z = 1 - \frac{1}{n}$ para llegar a la misma conclusión.

Veamos ahora que, sin embargo, la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Las sumas parciales de la serie son conocidas y convergen puntualmente:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}, \qquad N \to \infty.$$

Si fijamos un subconjunto compacto $K \Subset \mathbb{D}$, existe un número $r \in (0,1)$ tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \le r$. Entonces, por la desigualdad triangular inversa, $|1 - z| \ge 1 - |z| \ge 1 - r > 0$ y luego podemos estimar la diferencia de las sumas parciales y la suma de la serie:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| \le \frac{r^{N+1}}{|1-z|} \le \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

La última cantidad tiende a cero cuando $N \to \infty$ (independientemente de $z \in K$ ya que r es fijo); es decir,

$$\sup_{z \in K}\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| \le \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Por definición, esto significa que las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} z^n$ convergen a $\frac{1}{1-z}$ uniformemente en K. $\blacksquare$

Veamos ahora una suma que no es del mismo tipo que las anteriores (eso nos quedará más claro en cuanto estudiemos las series de potencias).

Ejercicio 8. *(a) Demuestre que la serie funcional compleja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

(b) ¿Es la suma de la serie del apartado anterior una función continua en $\mathbb{D}$*?*

SOLUCIÓN. $\square$ Obsérvese que esta serie es bastante más complicada que la del ejercicio anterior. No obstante, podemos emplear esencialmente el mismo método.

(a) Sea $K \Subset \mathbb{D}$; entonces, como antes, existe $r \in (0,1)$ tal que $|z| \le r$ para todo $z \in K$ se cumple. Por la desigualdad triangular inversa,

$$|1-z^n| \ge 1-|z^n| \ge 1-r^n \ge 1-r > 0$$

ya que $r^n \le r$ (recordando que $0 < r < 1$). Por tanto, tenemos la siguiente estimación para todo $z \in K$:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{1-|z|^n} \le \frac{r^n}{1-r}$$

y la serie $\sum_n \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}\sum_n r^n$ converge. El criterio de Weierstrass implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge uniformemente en K.
Obsérvese que era importante obtener una última estimación donde no apareciese la n en el denominador de los términos de la serie numérica, para tener una serie más manejable y cuya convergencia se pudiese establecer con facilidad.
Otro detalle MUY IMPORTANTE: para obtener una cota superior, hemos tenido que estimar el denominador inferiormente y para ello era necesario usar correctamente la desigualdad triangular inversa.
Un buen manejo de desigualdades similares es fundamental en muchas demostraciones y ejercicios y es fundamental prestar atención a esos detalles en los exámenes.

(b) Todos los términos de la serie son funciones racionales (cocientes de dos polinomios) y el denominador $1-z^n \neq 0$. Por tanto, todos los términos son funciones continuas en $\mathbb{D}$. En particular, también lo son en cada $K \Subset \mathbb{D}$. Puesto que la convergencia es uniforme en cada $K \Subset \mathbb{D}$, por la proposición enunciada antes, la suma de la serie es continua en cada $K \Subset \mathbb{D}$. (Advertencia: si no usamos los compactos y la convergencia uniforme en ellos, es sumamente difícil deducir la continuidad.)
Esto fácilmente implica que la suma es continua en todo $\mathbb{D}$ pero hay que razonarlo cuidadosamente, por ejemplo, como sigue.
Primero vemos que, para cada $z \in \mathbb{D}$, es continua en algún disco abierto $D(z;\delta)$ y, en particular, en el punto z. Podemos hacerlo de la siguiente manera: tomamos un disco $D(z;r) \subset \mathbb{D}$. Su frontera podría tener intersección con la frontera de $\mathbb{D}$ pero si consideramos un disco cerrado de radio más pequeño, por ejemplo, $\overline{D}(z;\delta/2)$, éste ya será un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y, por lo que hemos demostrado, la suma de la serie es continua en $\overline{D}(z;\delta/2)$. Por tanto, también lo es en el disco abierto $D(z;\delta/2)$.
Esto completa la demostración. $\blacksquare$

Veamos otro ejemplo más de una serie funcional, aparentemente complicada.

Ejercicio 9. *¿Para qué valores complejos de z converge la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$*?*

SOLUCIÓN. ☐ Después del cambio de variable

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

la serie se convierte en la serie geométrica de la variable w, que -después de los cálculos pertinentes (usando el resultado del Ejercicio 7- se puede volver a transformar en una función de z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{-2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w| < 1$, nuestra serie será convergente sólo para aquellos z que cumplan $|1+z| < |1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)| < |z-1|$.

Podemos entender el conjunto obtenido de dos maneras: geométrica y algebraica. Ambas son sencillas pero instructivas.
Geométricamente, dicho conjunto representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de -1 que de 1, que es el semiplano izquierdo abierto.
Algebraicamente, podemos razonar como sigue: el conjunto indicado es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2 < |1-z|^2$. Haciendo uso de la fórmula habitual: $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$, vemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$1 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z < 1 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z.$$

Esta desigualdad se reduce a $\mathrm{Re}\, z < 0$, lo cual significa que z está en el semiplano izquierdo abierto. ■

Para completar esta sección preliminar, mencionamos de paso, sin demostración, el siguiente criterio.

Proposición. (*Criterio uniforme de Cauchy*) La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \ge N_0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall z \in A\ \left|\sum_{j=N+1}^{N+k} f_j(z)\right| < \varepsilon.$$

Lo usaremos en algunas demostraciones en esta asignatura o en Variable Compleja II.

En la siguiente entrega de apuntes, hablaremos de las series de potencias, un tema central en Variable Compleja. Volverá a aparecer la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de un disco, así como el criterio de comparación de Weierstrass.

Preparado por Dragan Vukotić
(Dpto. de Matemáticas, UAM)