Variable Compleja I (CURSO 2022-23, **Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Funciones elementales (marzo de 2023)

Esta versión de los apuntes se ampliará en las próximas semanas, para incluir algunas demostraciones y gráficas. Los detalles sobre los temas anteriores pueden consultarse en las entregas de apuntes hechos a mano por la Profesora María Victoria Melián.

Recordatorio: relación entre la $\mathbb{C}$-diferenciabilidad y la $\mathbb{R}$-diferenciabilidad. Recordemos que, por definición, f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z si y sólo si existe la derivada compleja $f'(z)$, definida de la forma habitual vista en clase. Las funciones $\mathbb{R}$-diferenciables en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ ya se han visto en los cursos de Cálculo Multivariable.

El siguiente resultado fundamental, ya demostrado en clase, no se enuncia en todos los libros de texto. La razón para ello es que varios textos prefieren evitar la discusión de las funciones $\mathbb{R}$-diferenciables (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), así que en lugar de dar la condición que es a la vez necesaria y suficiente, se limitan a citar sólo algunas condiciones necesarias y otras suficientes. En esta primera versión daremos sólo el enunciado, a modo de repaso. La demostración se expondrá más adelante, en otra entrega ampliada de estos apuntes.

Teorema. (Caracterización de la diferenciabilidad compleja) Sea Ω un dominio en el plano complejo, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función compleja, $f=u+iv$ y $z\in\Omega$. Entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en el punto $z=x+yi\cong(x,y)$ si y sólo si f (vista como función de dos variables $f:(x,y)\mapsto(u,v)$) es $\mathbb{R}$-diferenciable en z y satisface en dicho punto las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(z)=v_y(z)\,,\qquad u_y(z)=-v_x(z)\,.$$

En este caso, $f'(z)=u_x(z)+i\,v_x(z)=v_y(z)-i\,v_x(z)$.

Por tanto, f es holomorfa en Ω (tiene derivada en todos los puntos de Ω) si y sólo si es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo punto de Ω y satisface las ecuaciones (C-R) en Ω.

La función exponencial

Es una de las funciones más importantes en las matemáticas y ya hemos visto su versión real en Cálculo I. Aquí veremos que esta función se puede extender a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, manteniendo las propiedades básicas relativas a las reglas algebraicas y a la diferenciación.

Es importante recalcar que la función exponencial se puede definir de diferentes maneras (que varían de un texto a otro) pero finalmente se puede comprobar, tal y como veremos en este curso, que las distintas definiciones coinciden y, por tanto, son todas igualmente legítimas. Una de las posibles definiciones es la siguiente.

Definición. La *función exponencial compleja* E se define, para todo $z=x+yi\in\mathbb{C}$, mediante la *fórmula de Euler*: $E(z)=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y)$.

Por supuesto, usaremos también la notación habitual e^z para el valor $E(z)$. El uso de la letra E sólo corresponde a la necesidad de tener una notación para la función en lugar de la notación para su valor en un punto.

Evidentemente, cuando $z \in \mathbb{R}$, tenemos que $y = 0$ y, por tanto, $E(z) = e^x$, así que E es una función que extiende a todo el plano complejo la definición de la exponencial real, ya conocida de los cursos de Cálculo. Nuestro objetivo es comprobar que la función así definida tiene varias propiedades que cabe esperar y que justifican el nombre "función exponencial". Repasemos algunas de ellas.

Veremos a continuación que, efectivamente, $E(z)$ tiene diversas propiedades características de la función exponencial real. Es muy habitual usar también la notación e^z, cosa que haremos más adelante, una vez comprobadas las propiedades de $E(z)$; es decir, una vez que hayamos confirmado que "se merece" el nombre de función exponencial. Por ejemplo, dos propiedades típicas de la exponencial real son:

$$(e^x)' = e^x, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nuestros siguientes ejemplos muestran que $E(z)$ tiene las mismas propiedades.

• Ya sabemos de la primera semana de clase que, como consecuencia de la fórmula de A. de Moivre, E satisface la identidad esperada:

$$E(z)E(w) = E(z+w), \qquad z, w \in \mathbb{C},$$

de sobra conocida en el caso cuando z, $w \in \mathbb{R}$.

• También es inmediato ver que $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z} > 0$ y, por tanto, $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, otra propiedad que teníamos para los valores reales de z.

Teorema. La función exponencial E es entera y satisface la identidad $E'(z) = E(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Para la función $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$ es fácil comprobar que tiene las derivadas parciales continuas y, por tanto, es $\mathbb{R}$-diferenciable. También es inmediato que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad , \qquad u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x .$$

Por el teorema sobre la diferenciabilidad compleja citado anteriormente, E es holomorfa en $\mathbb{C}$ (entera). Además, por la fórmula para su derivada compleja, comprobamos que

$$E'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = E(z), \tag{1}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

A partir de ahora, escribiremos casi siempre e^z en lugar de $E(z)$.¿Cuántas funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ existen con la propiedad de que $f' = f$? Veámoslo.

Ejercicio 1. *Si una función entera satisface la ecuación diferencial compleja $f' = f$, entonces f es un múltiplo constante de E; esto es, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = Ce^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

SOLUCIÓN. Puesto que $E(z)$ es entera, por la Regla de la cadena, también lo es $E(-z)$, así que también es entera la función $h(z) = E(-z)f(z)$. Calculando su derivada, obtenemos

$$h'(z) = -E'(-z)f(z) + E(-z)f'(z) = -E(-z)f(z) + E(-z)f(z) \equiv 0,$$

teniendo en cuenta (1).
Un teorema importante, visto en clase, nos dice que si una función holomorfa tiene derivada nula en un dominio plano, entonces es constante en ese dominio. La función h aquí considerada es una función entera (holomorfa en todo el plano), el plano es un dominio y $h' \equiv 0$ en $\mathbb{C}$. Por tanto, h es idénticamente constante en $\mathbb{C}$: existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $E(-z)f(z) \equiv C$. Multiplicando ambos lados de la última igualdad por $E(z)$, se sigue que $f(z) = CE(z)$. ■

Más adelante, veremos el siguiente notable hecho (basado en el Teorema de la unicidad para funciones holomorfas): toda función f holomorfa en el plano que para cada número real x satisface la igualdad $f(x) = e^x$, necesariamente es igual a la exponencial compleja E en todo el plano. Es otra manera de demostrar el teorema anterior pero, obviamente, supone un conocimiento teórico más avanzado del que tenemos de momento.

• Tenemos también una nueva propiedad de la exponencial que "no se ve en la recta real": es $2\pi i$-periódica, esto es,

$$E(z + 2\pi i) = e^{x+yi+2\pi i} = e^{x+yi} = E(z).$$

Propiedades geométricas de la función exponencial. No es difícil ver que la imagen de una recta horizontal por la función exponencial es una semirrecta que parte del origen. En efecto, si nos fijamos en la recta horizontal $y = y_0$ (que es lo mismo que $\operatorname{Im} z = y_0$), vemos que para todos los puntos z pertenecientes a ella se tiene que $e^z = e^x e^{iy_0}$. Se trata de un número complejo de módulo positivo e^x y de argumento y_0. Puesto que e^x recorre todo el intervalo $(0, +\infty)$ cuando x recorre los números reales, vemos que el módulo puede tomar cualquier valor en $(0, +\infty)$. Por tanto, las imágenes tienen un argumento fijo y pueden tener módulo positivo arbitrario, así que forman una semirrecta que parte desde el origen y forma el ángulo y_0 con la parte positiva del eje real.

La imagen de una recta vertical por la función exponencial es una circunferencia centrada en el origen. En efecto, si ahora nos fijamos en la recta vertical $x = x_0$ (que es lo mismo que $\operatorname{Re} z = x_0$), vemos que para todos los puntos z pertenecientes a ella se tiene que $e^z = e^{x_0} e^{iy}$. Los números de este tipo todos tienen módulo $|e^z| = e^{x_0}$, que es un valor fijo. Su argumento puede ser arbitrario dado que podemos elegir valores arbitrarios de y. Por consiguiente, las imágenes forman la circunferencia de radio e^{x_0} centrada en el origen.

Obviamente, debido a la periodicidad, la función exponencial no es inyectiva en ninguna banda horizontal cerrada de anchura 2π o superior, por ejemplo,en $\{z = x + yi : -\infty < x < +\infty, 0 \le y \le 2\pi\}$. En efecto, $e^0 = 1 = e^{2\pi i}$.

Sin embargo, es fácil ver lo siguiente.

Proposición. La función E es inyectiva en cualquier banda horizontal abierta (o incluso semicerrada) de anchura 2π o inferior. Por ejemplo, es inyectiva en el dominio simplemente conexo

$$\Omega = \{z = x + yi \,:\, -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se puede ver como sigue. Si $z = x + yi$, $w = u + vi \in \Omega$ y $e^z = e^w$, es decir, $e^x e^{yi} = e^u e^{vi}$, se deduce de la unicidad de la representación polar que $e^x = e^u$ y $v = y + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Eso significa que $x = u$ y $|v - y| \geq 2\pi|n|$, lo cual es imposible (puesto que $-2\pi < v - y < 2\pi$, salvo que $v - y = 0$. Esto demuestra que $z = w$. Se sigue que E es inyectiva en Ω. El mismo argumento demuestra que es inyectiva en cada una de las franjas semicerradas

$$\{z = x + yi \,:\, -\infty < x < +\infty, -\pi < y \leq \pi\}, \quad \{z = x + yi \,:\, -\infty < x < +\infty, -\pi \leq y < \pi\}. \qquad \blacksquare$$

Se desprende de la Proposición anterior y de la discusión de las propiedades geométricas que la imagen por la función exponencial de la banda horizontal mencionada

$$\Omega = \{z = x + yi \,:\, -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}$$

es precisamente la unión de todas las semirrectas que parten desde el origen y forman con la parte positiva del eje real un ángulo comprendido estrictamente entre $-\pi$ y π, lo cual es el plano complejo menos el corte a lo largo de la parte negativa del eje real (compuesta por los números sin argumento o con argumento $\pm\pi$):

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-r \,:\, r \geq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,:\, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}.$$

Por tanto, la función exponencial es una biyección holomorfa (lo que más adelante llamaremos una *aplicación conforme*) de Ω sobre D.

Funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas

Podemos definir las extensiones al plano complejo de las funciones reales trigonométricas e hiperbólicas, vistas en Cálculo I.

Las funciones hiperbólicas. Empezamos por las funciones coseno y seno hiperbólico, definiéndolas en analogía con las funciones reales vistas en el primer curso de Cálculo.

Definición. Las funciones *coseno* y *seno hiperbólico* se definen, respectivamente, como sigue:

$$\cosh z = (e^z + e^{-z})/2, \qquad \operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Es fácil comprobar las siguientes fórmulas, análogas a las conocidas del caso real:

$$(\cosh z)' = \operatorname{senh} z, \qquad (\operatorname{senh} z)' = \cosh z,$$

por ejemplo, usando la regla de la cadena. También es fácil comprobar que

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

La demostración de esta última identidad se deja como ejercicio (muy sencillo); véanse las hojas de problemas de este curso.

Las funciones trigonométricas. La motivación para definir el coseno y el seno proviene de la fórmula de Euler. Para $t \in \mathbb{R}$, sumando y restando las igualdades

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

y despejando $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, obtenemos

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Por tanto, tiene sentido proponer la siguiente definición.

Definición. Las funciones complejas *coseno* y *seno* se definen, respectivamente, en términos de la función exponencial como sigue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Una comprobación rutinaria, usando la regla de la cadena, muestra que se siguen cumpliendo las fórmulas conocidas para las funciones trigonométricas reales:

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Definición. Las funciones complejas *tangente* y *cotangente* se definen, respectivamente, en términos de las funciones seno y coseno como sigue:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

para aquellos z donde el cociente tiene sentido.

Un ejercicio útil e instructivo consiste en determinar los puntos donde las funciones tangente y cotangente no están definidas, es decir, determinar los ceros complejos de las funciones coseno y seno, respectivamente.

Ejercicio 2. *Resuelva la ecuación compleja* $\cos z = 0$.

SOLUCIÓN. Escribiendo $z = x + iy$ y usando la fórmula de Euler, de la definición del coseno complejo se obtiene

$$0 = e^{iz} + e^{-iz} = \cos x (e^y + e^{-y}) + i \left(e^{-y} \operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x \right).$$

Por tanto, $\cos x (e^y + e^{-y}) = 0$ y $e^{-y} \operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x = 0$. La exponencial real es siempre positiva, asi que $\cos x = 0$. Luego $\operatorname{sen} x \neq 0$, así que $e^{-y} = e^y$ y, por tanto, $y = 0$. Se sigue que los únicos ceros de la función compleja coseno son los ceros reales de la función coseno real, $z = \pi n + \frac{\pi}{2}$, para n entero. (Otro método de solución es posible.) ■

Dejamos como ejercicio identificar los ceros de la función seno. ¿Qué respuesta cabe esperar? (Los ceros deben ser exactamente los mismos que en el caso real.)

Por supuesto, los mismos cálculos que en los cursos básicos -pero para la derivada compleja- muestran que se tienen las fórmulas esperadas:

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z, \qquad \operatorname{ctg}(z + \pi) = \operatorname{ctg} z, \qquad (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\operatorname{ctg} z)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 z},$$

para todos aquellos z donde las expresiones involucradas tienen sentido.

Teorema de la función inversa

Ya hemos definido varias funciones elementales que son enteras (es decir, holomorfas en todo el plano): los polinomios, la exponencial, las trigonométricas y las hiperbólicas. En este capítulo de los apuntes definiremos otras funciones holomorfas consideradas "elementales" pero cuya definición no va a ser tan automática ya que no van a ser enteras y, para definirlas, tendremos que hacer algo especial como, por ejemplo, restringir el dominio de definición de alguna manera. Veremos que, en cuanto consigamos que sean continuas, resultarán también ser holomorfas en los dominios de su definición. Nos referimos a la función logarítmica, a las raíces y otras potencias, así como a las funciones trigonométricas inversas.

Teorema de la función inversa. Al igual que en las hojas de problemas y en clase, usaremos la notación $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en el dominio Ω (es decir, es $\mathbb{C}$-diferenciable en cada punto de Ω).

Relación entre el Jacobiano y la derivada compleja. A menudo identificamos una función holomorfa f en un dominio Ω en el plano, escrita como $f = u + iv$ con u y v reales, con la función correspondiente de dos variables $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Es fácil ver que existe una relación simple pero importante entre el Jacobiano de f (vista como función de dos variables) y su derivada compleja (como función holomorfa). En efecto, teniendo en cuenta que f ha de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, vemos fácilmente que su Jacobiano en un punto $c \in \Omega$ viene dado por

$$J_f(c) = \begin{vmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ -v_x(c) & u_x(c) \end{vmatrix} = u_x^2(c) + v_x^2(c) = |f'(c)|^2, \tag{2}$$

recordando que la derivada compleja de f en c es $f'(c) = u_x(c) + i v_x(c)$.

Teorema de la función inversa. Dado un dominio Ω en el plano y una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, si supiésemos que f tiene función inversa g y que ésta es también holomorfa, derivando la relación $g(f(z)) = z$, calcularíamos fácilmente: $g'(f(z))f'(z)) = 1$ y de allí obtendríamos la fórmula para la derivada de g, análoga a la que conocemos del teorema de la función inversa de Cálculo: $g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z))}$, es decir,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}\,.$$

Pero, ¿cómo sabemos cuándo y dónde existe la inversa g y cómo podemos deducir que es holomorfa? En esta sección abordaremos esta cuestión usando nuestros conocimientos de cálculo multivariable y de variable compleja.

Teorema. (*Teorema de la función inversa para funciones holomorfas).* Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ y $c \in \Omega$. Si $f'(c) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva entre U_c y $f(U_c)$ y su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también holomorfa. En este caso, tenemos la fórmula

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}\,, \qquad \forall\, w \in f(U_c)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis $f'(c) \neq 0$, junto con la fórmula (2), nos dice que el Jacobiano de f en el punto c es distinto de cero. El Teorema de la función inversa del cálculo multivariable (visto en el curso de Análisis Matemático, con la hipótesis de que $f \in C^1(\Omega)$) implica la existencia de un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva, el Jacobiano de $f|_{U_c}$ es distinto de cero en todo U_c y, además, su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también $\mathbb{R}$-diferenciable.

También por el Teorema de la función inversa, la matriz Jacobiana de $f|_{U_c}$ es la matriz inversa de la Jacobiana de f en el mismo entorno. Sea $g = U + iV$, con U y V sus partes real e imaginaria, respectivamente. Aplicando la fórmula (2), para todo $z \in U_c$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} U_x(f(z)) & U_y(f(z)) \\ V_x(f(z)) & V_y(f(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} v_y(z) & -u_y(z) \\ -v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}.$$

Usando una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para u y v, de aquí se deduce fácilmente que

$$U_x(f(z)) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\, v_y(z) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\, u_x(z) = V_y(f(z))\,,$$

lo cual es una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para U y V. La otra se comprueba de forma análoga. Esto demuestra que g es holomorfa en $f(U_c)$, ya que es $\mathbb{R}$-diferenciable allí y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por último, calculamos la fórmula para la derivada mediante el cálculo mostrado antes, al comienzo de la sección, derivando $g(f(z)) = z$ en U_c. ■

Veremos más adelante que la hipótesis de que f sea de la clase C^1 es redundante, ya que probaremos que toda función holomorfa tiene derivadas parciales de cualquier orden, pero ello requiere bastante trabajo. Puede demostrarse también de forma directa una versión más fuerte del teorema, que sólo pide que f sea $\mathbb{R}$-diferenciable y con la diferencial invertible en un entorno de c. Para esta versión, véase el blog del Medalla Fields Terrence Tao:

https://terrytao.wordpress.com/tag/inverse-function-theorem/.

El teorema de la función inversa nos permite calcular la derivada de la función inversa de una función holomorfa en un dominio, en analogía con el teorema del mismo nombre visto en los cursos de Cálculo I (para las funciones de una variable real) y Análisis Matemático (para las funciones de varias variables reales). En particular, obtendremos las fórmulas para la derivada de la función raíz cuadrada (la inversa de la función $f(z) = z^2$) y de la función logaritmo (la inversa de la exponencial). Pero antes de llegar a ello, tenemos que recordar que la raíz de un número complejo no nulo no tiene un valor único y, como veremos, el logaritmo tendrá una cantidad infinita numerable de valores. El problema va a consistir en determinar cómo podemos definir esas funciones para que tengan valor único y sean, por ejemplo, continuas (que es una condición necesaria para que sean holomorfas). Veremos que el fondo del problema está en poder definir la función argumento (ya mencionada antes) como función continua. Es una función que no es holomorfa pero es fundamental en la definición de otras funciones elementales y holomorfas.

Logaritmos y potencias de números complejos

El logaritmo de un número complejo. En primer lugar, debemos definir el logaritmo de un número complejo. Parece razonable aceptar que $w = \log z$ si y sólo si $z = e^w$. Recordando que la función exponencial no se anula, el logaritmo sólo tendrá sentido para $z \neq 0$. Escribiendo

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \qquad w = x + yi,$$

vemos que $z = e^w$ es lo mismo que $e^x e^{yi} = re^{i\theta}$, lo cual es equivalente a $e^x = r$, $y - \theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, a $x = \ln r$, $y = \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, donde "ln" denota el logaritmo neperiano habitual de un número real y positivo. Finalmente, concluimos que el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ (expresado en forma polar) tiene una cantidad infinita (pero numerable) de valores y viene dado por la fórmula

$$\log z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

siendo $\arg z$ (como en clase) cualquiera de los posibles valores del argumento y $\operatorname{Arg} z$ el valor principal del argumento, elegido habitualmente en el intervalo $(-\pi, \pi]$ u otro convenientemente elegido. Hemos usado dos notaciones distintas, ln y log, para distinguir entre el logaritmo neperiando de un número positivo (valor único) y el conjunto (infinito numerable) de valores del logaritmo complejo.

Ejercicio 3 *Calcule todos los valores de* $\log(3i)$.

SOLUCIÓN. La forma polar de $3i$ es $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$, así que, por la fórmula (3), obtenemos

$$\log(3i) = \ln 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) i = \ln 3 + \pi \left(2n + \frac{1}{2}\right) i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Proposición. Para todo $z \neq 0$ y para cualquiera de los valores de $\log z$, se cumple la identidad

$$e^{\log z} = z\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la fórmula (3) y recordando que $e^{2\pi n i} = 1$, vemos que

$$e^{\log z} = e^{\ln|z|+(\operatorname{Arg} z+2\pi n)i} = e^{\ln|z|}e^{(\operatorname{Arg} z+2\pi n)i} = |z|e^{(\operatorname{Arg} z)i}\cdot e^{2\pi n i} = z\cdot 1 = z\,. \qquad \blacksquare$$

Observación. No nos debe sorprender que, para un $z \neq 0$ dado, su logaritmo tenga infinitos valores mientras que $e^{\log z}$ tenga sólo uno porque aquí ayuda la periodicidad de la función exponencial: $e^{2\pi n i} = 1$.

Las ecuaciones para las funciones como seno y coseno complejas también están estrechamente relacionadas con los valores del logaritmo, como veremos en el siguiente ejemplo.

En esta entrega de apuntes ya hemos resuelto alguna ecuación similar (Ejercicio 2). Mostraremos ahora otro método de solución, que involucra logaritmos.

Ejercicio 4 *Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación* $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. Partimos de la definición del seno:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}\,.$$

Multiplicando ambos lados por $2ie^{iz}$, vemos que la ecuación es equivalente a

$$e^{2iz} - 1 = ie^{iz}\,.$$

Escribiendo $w = e^{iz}$, la última igualdad se reduce a $w^2 - iw - 1 = 0$, una ecuación cuadrática cuyas soluciones son

$$w = \frac{i+\sqrt{3}}{2}\,, \qquad w = \frac{i-\sqrt{3}}{2}\,.$$

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

$$e^{iz} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}\,, \qquad e^{iz} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

Finalmente, tomando logaritmos obtenemos

$$iz = \frac{\pi}{6}i + 2\pi n i\,, \qquad iz = \frac{5\pi}{6}i + 2\pi n i\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

es decir,

$$z = \frac{\pi}{6} + 2\pi n\,, \qquad z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,. \qquad \blacksquare$$

Las potencias complejas o de un número complejo. Recordemos del curso de Cálculo I que, para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene la fórmula

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{(\ln a)\cdot x}.$$

Por tanto, para $a,\ z \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ (necesario y suficiente para la existencia de $\log a$), parece razonable definir

$$a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a| + i \arg a)\cdot z}, \tag{4}$$

donde hemos calculado los valores de $\log a$ según la definición (3). Por tanto, las potencias complejas también tienen infinitos valores.

Ejercicio 5 *Para $z \in \mathbb{C}$, calcule todos los valores de* $(3i)^z$.

SOLUCIÓN. Según la fórmula (4) y usando el resultado del Ejercicio (3), obtenemos

$$(3i)^z = e^{\log(3i)\cdot z} = e^{\left(\ln 3 + \pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)i\right)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

No tiene mucho sentido simplificar nada en la última expresión obtenida, así que la podemos dejar tal y como está. ■

Ejercicio 6 *Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, calcule todos los valores de* $(2z)^z$.

SOLUCIÓN. Usando de nuevo la fórmula (4), obtenemos

$$(2z)^z = e^{(\log(2z))\cdot z} = e^{\left(\ln|2z| + \arg(2z)i\right)z} = e^{\left(\ln|2z| + (\mathrm{Arg}(2z) + 2\pi n)i\right)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad ■$$

Las raíces complejas y los logaritmos. De manera análoga a la discusión anterior, para $z \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, podemos definir

$$z^a = e^{a(\log z)} = e^{a(\ln|z| + i \arg z)}. \tag{5}$$

De hecho, la definición también tiene sentido cuando $a \in \mathbb{C}$, pero entonces el cálculo de las partes real e imaginaria de $a(\log z)$ requerirá alguna multiplicación adicional y una reorganización del exponente.

De esta manera, ahora tenemos dos interpretaciones diferentes de las raíces de un número complejo. El siguiente ejemplo es importante para asegurarnos de que no existe contradicción entre ambas.

Ejercicio 7 *Compruebe que, interpretando la raíz n-ésima de un número $z \neq 0$ como una potencia: $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, aplicando la fórmula* (4)*, el resultado que se obtiene concuerda con los valores de las raíces vistos en clase al principio del curso.*

SOLUCIÓN. Escribiendo $z=|z|e^{i\operatorname{Arg} z}=re^{i\theta}$, tenemos que $\arg z=\theta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, la fórmula (4) nos da el siguiente resultado:

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\log z}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z)}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{\frac{1}{n}i\arg z}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}\arg z}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2\pi k}{n}i},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Es obvio que se trata de la misma fórmula que ya vimos antes en clase para la raíz n-ésima. Al igual que antes, observamos que es suficiente tener en cuenta sólo los valores $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ puesto que para los demás valores de k no se obtienen valores nuevos de la raíz. ■

El logaritmo, las raíces y las potencias como funciones

Como ya hemos visto, todos los valores del logaritmo, de las raíces y de las potencias complejas en general pueden expresarse en términos de $\arg z$ (que toma infintos valores) y, por tanto, en términos del valor principal del argumento, $\operatorname{Arg} z$, típicamente elegido en el intervalo $(-\pi,\pi]$. ¿Sería suficiente tomar $n=0$ (o algún otro valor fijo n_0) en la fórmula (3) para definir el logaritmo correctamente y como una función continua en todo el plano menos en el origen? Veremos que no. El siguiente hecho será nuestro punto de partida.

Observación. La función $\operatorname{Arg} z$ no es continua en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. El problema surge cuando nos acercamos a un punto (cualquiera) en el semieje real negativo, digamos $z=-r,\ r>0$. Por ejemplo, consideremos lo que ocurre cuando nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de la circunferencia

$$\{z:|z|=r\}=\{re^{i\theta}:-\pi<\theta\le\pi\}$$

de radio r centrada en el origen. Si nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de esta circunferencia y "por arriba" (a través de un arco C^+ en el segundo cuadrante), donde el argumento principal toma valores entre $\pi/2$ y π), dejando que el argumento principal de z tienda a π, obtendremos

$$\lim_{z\to -r,\ z\in C^+}\operatorname{Arg} z=\lim_{\theta\to\pi^-}\theta=\pi.$$

(Conviene hacer un dibujo.) Sin embargo, cuando nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de la misma circunferencia pero "desde abajo" (a través de un arco C^- en el tercer cuadrante, donde el argumento principal toma valores entre $-\pi/2$ y $-\pi$), dejando que el argumento principal de z tienda a $-\pi$, obtendremos

$$\lim_{z\to -r,\ z\in C^-}\operatorname{Arg} z=\lim_{\theta\to-\pi^+}\theta=-\pi.$$

Esto demuestra que no existe $\lim_{z\to -r}\operatorname{Arg} z$ y, por tanto, la función argumento principal no es continua en $z=-r$. Puesto que esto es así para $r>0$ arbitrario, concluimos que no es continua en ningún punto del semieje real negativo. Por supuesto, la función argumento ni siquiera está definida en $z=0$. Sin embargo, no es difícil convencerse de que $\operatorname{Arg} z$, sí es continua en todos los puntos restantes del plano, es decir, en el dominio

$$D=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:x\le 0\}=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:-\pi<\operatorname{Arg} z<\pi\}.$$

Es bastante obvio que si, en lugar de $\operatorname{Arg} z$ tomamos otra determinación del valor del argumento como $\operatorname{Arg} z+2\pi n_0$, para un $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, tendremos el mismo problema en los valores reales y negativos de z. Y si para unos valores de z definimos el valor del argumento como $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0$ y para otros $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_1$, con $n_0 \neq n_1$, también es fácil ver que tendremos discontinuidad en muchos puntos.

Logaritmo como función continua. Nos gustaría definir la función logaritmo complejo como función continua y lo más natural es definirlo como $\log z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0)i$ para algún valor fijo n_0, siendo la posibilidad más simple $n_0 = 0$. Pero, para que el logaritmo sea una función continua en un dominio, también lo tiene que ser su parte imaginaria, como ya vimos antes en clase, y su parte imaginaria es discontinua en todos los puntos del semieje real negativo. Por tanto, el logaritmo no se puede definir como función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Existen dos formas razonables de solucionar este problema.

Una solución consiste en aceptar la idea de reducir el dominio de la función Arg y también de la función $L(z) = \log z$ excluyendo los reales negativos. Para que nos quede un dominio, debemos quitar un conjunto cerrado. Por tanto, lo más habitual es hacer un "corte" en el plano desde el origen hasta el infinito, eliminando el semieje cerrado $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. De esta manera, obtenemos la siguiente definición de la función $L : D \to \mathbb{C}$:

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Por supuesto, podemos variar esta definición, dando otro valor al argumento:

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0) = \ln r + i\theta + 2\pi n_0 i$$

para cierto $n_0 \in \mathbb{Z}$ fijo. Cada valor de n_0 elegido nos da una *determinación* (o *rama*) del logaritmo (y cada una de ellas es una función correctamente definida). En cada situación concreta, elegiremos sólo una determinación que nos convenga y ésta nos dará una función continua en el dominio Ω señalado arriba (plano con el corte a lo largo del semieje negativo). Lo más habitual es elegir la más simple, a la que daremos un nombre propio.

Definición. La *determinación principal* del logaritmo complejo en el dominio

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

viene dada por la fórmula

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Con frecuencia se escribe $\operatorname{Log} z$ para denotar esta determinación principal.

Conviene señalar que, si preferimos dar otros valores al argumento, por ejemplo, en el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces hemos de hacer el corte a lo largo del semieje real positivo $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, eliminando la discontinuidad que se tiene cuando se tiende a un punto de dicho semieje. Por supuesto, son posibles otros cortes en otras direcciones (oblicuas o verticales).

Otra posible solución, de la que no hablaremos este año, consiste en ampliar el dominio de definición de la función logaritmo, lo cual nos llevaría a la idea de superficies de Riemann y las llamadas funciones multiforme. Véanse los libros recomendados de A. Fernández o de L.V. Ahlfors, por ejemplo. Hablando sin rigor, una superficie de Riemann se puede imaginar como la estructura de un aparcamiento con varias (o muchas) plantas donde a lo largo del corte, subimos o bajamos a la siguiente planta.

Logaritmo como función holomorfa. Veremos que, una vez definida la función logaritmo en un dominio reducido (plano con un corte) como función continua, automáticamente será holomorfa en dicho dominio.

• Una explicación posible es la siguiente. Recordemos de una de las secciones anteriores que la función exponencial E es una aplicación biyectiva entre $\Omega = \{z = x + yi : -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}$ y el dominio $D = \mathbb{C} \setminus \{-r : r \geq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$.

Puesto que $E \in \mathscr{H}(\Omega)$ (es holomorfa en Ω) y su derivada $E'(z) = E(z) \neq 0$, se sigue del Teorema de la función inversa que la función inversa $L = E^{-1} : D \to \Omega$ es también holomorfa en un entorno de cada punto de D, luego es holomorfa en D. Pero la función L así definida es precisamente $L(z) = \log z$, el logaritmo complejo definido en el dominio restringido D.

Para calcular la derivada del logaritmo, escribimos

$$E(z) = e^z, \quad E'(z) = e^z = E(z), \qquad L(z) = \log w.$$

Por el Teorema de la función inversa, obtenemos

$$L'(w) = \frac{1}{E'(L(w))} = \frac{1}{E(L(w))} = \frac{1}{w}.$$

Cambiando la letra w por z, obtenemos la fórmula deseada $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

• He aquí otra forma de justificar lo mismo, sin usar el Teorema de la función inversa, sólo usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Dentro del dominio restringido Ω, el argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede expresarse mediante la fórmula vista en la primera hoja de problemas:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0, \end{cases}$$

(Obsérvese que, al restringir el dominio de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a Ω, queda eliminada la posibilidad $x < 0$ e $y = 0$ (los números reales y negativos.) La función argumento principal así definida es continua en Ω. En realidad, es cierto mucho más: es holomorfa en Ω. Puede verse que en cada punto derivadas parciales continuas (las mismas que $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$) y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto require comprobaciones, considerando por separado cada parte de su dominio. La comprobación es la misma en los tres primeros casos de los cinco mencionados arriba. Puesto que hemos definido el logaritmo en Ω como

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arg} z,$$

es fácil calcular las derivadas parciales de $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \operatorname{Arg} z$ y ver que son continuas en Ω y satisfacen alli las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x.$$

En cada uno de los tres conjuntos abiertos en cuestión, el valor de la función es el mismo, salvo una constante, que desaparece al derivar, así que las derivadas parciales coinciden. En los dos últimos casos, hay que calcular las derivadas parciales v_x y v_y por definición y comprobar que estas dos funciones son continuas en todo Ω. Por ejemplo, a la hora de calcular $v_x(0, y_0)$ con $y_0 > 0$, usando las fórmulas dadas arriba y L'Hopital, vemos que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{u(h, y_0) - u(0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(h, y_0) - u(0, y_0)}{h} = -\frac{1}{y_0},$$

lo cual nos da el valor de $u_x(0, y_0)$. Después es fácil comprobar que $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} u_(x, y) = u_x(0, y_0)$, etc., además de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en los puntos como $(0, y_0)$.

Esto demuestra que la función logaritmo es holomorfa. Lo acabamos de ver para la determinación principal pero, como las demás determinaciones difieren de ella en una constante, tendrán también la misma derivada. Además podemos calcular su derivada, que es la que cabía esperar:

$$(\log z)' = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega.$$

Un poco más adelante, veremos que el Teorema de la función inversa para las funciones holomorfas también nos permite deducir la holomorfía del logaritmo y nos dará otra forma de calcular su derivada.

Ejercicio 8 *¿Es cierto que la determinación principal de la función logaritmo tiene la misma propiedad que el logaritmo real:* $\log(zw) = \log z + \log w$ *? ¿Podemos proponer alguna restricción adecuada para que la fórmula siga siendo válida?*

SOLUCIÓN. La respuesta en general es no. El problema surge si los argumentos de z y de w "suman demasiado" (π o más). Por ejemplo, si $z = i = e^{(\pi/2)i}$, $w = e^{(3\pi)/4i}$, entonces $zw = e^{(5\pi)/4i} = e^{-(3\pi)/4i}$ (¡hay que elegir el argumento principal en el intervalo $(-\pi, \pi)$!) y entonces

$$\log z = \log i = \frac{\pi}{2} i, \quad \log w = \frac{3\pi}{4} i, \quad \log(zw) = -\frac{3\pi}{4} i$$

y es obvio que

$$\log z + \log w = \frac{5\pi}{4} i \neq -\frac{3\pi}{4} i = \log(zw).$$

Si pedimos que $|\mathrm{Arg}\, z| < \pi/2$ y $|\mathrm{Arg}\, w| < \pi/2$ (es sólo una posibilidad pero es una condición muy habitual, ya que significa pedir que ambas z y w tengan parte real positiva), entonces $|\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w| < \pi/2 + \pi/2 = \pi$ y es fácil ver que la fórmula $\log(zw) = \log z + \log w$ será válida. ■

Las raíces y otras potencias y funciones inversas. Una vez definida la función logaritmo en un dominio adecuado (con una determinación elegida), en el mismo dominio podemos definir las raíces y, en general, otras potencias arbitarias, como en la fórmula (3), siendo la determinación principal:

$$a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a| + i\,\mathrm{Arg}\, a)\cdot z}.$$

Es fácil calcular la derivada de esta función usando la del logaritmo y la Regla de la cadena:

$$(a^z)' = \left(e^{(\log a)\cdot z}\right)' = e^{(\log a)\cdot z} \log a = a^z \log a\,.$$

Las definiciones y los cálculos son similares para las funciones como z^a o, por ejemplo, $(2iz)^z$. En particular, el valor principal de la función raíz cuadrada se puede definir en el dominio ya conocido

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

por la fórmula

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\log z)} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \qquad \text{para } z = re^{i\theta}$$

y es una función holomorfa en el mismo dominio D. Un sencillo razonamiento geométrico muestra la funcion raíz cuadrada es una aplicación biyectiva de D sobre el dominio

$$G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\}.$$

(¿Por qué?)

En el dominio G señalado, la función raíz cuadrada es la inversa de la función z^2 y podemos razonar como antes, aplicando el Teorema de la función inversa para concluir que la raíz cuadrada es holomorfa en G, obteniendo el resultado esperado:

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}\,.$$

Nótese que $\sqrt{z}$ existe para todo $z \in G$ ya que $G \subset D$. En el dominio D señalado antes, la función raíz n-ésima es la inversa de la función z^n y podemos razonar como antes, viendo que su derivada no se anula en ningún punto de D, aplicando el Teorema de la función inversa para concluir que la inversa es holomorfa en O. Entonces la derivada se puede calcular en cada punto y se puede comprobar que las fórmulas propuestas son las correctas.

Ejercicio 9 *Examinar la invertibilidad local de la función coseno.*

SOLUCIÓN. Para $f(z) = \cos z$, sabemos que $f'(z) = -\operatorname{sen} z$. Es fácil ver, como ya hemos comentado, que el seno complejo tiene los mismos ceros que el seno real: $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, para un punto $z \ne \pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$, tendremos $f'(z) \ne 0$ en ese punto y, por tanto, al menos en un entorno del punto existirá la función inversa (local) del coseno, a la que (por supuesto) llamaremos *arco coseno* y denotaremos arccos. Dicho de otra manera, $g(w) = \arccos w$ si $f(z) = \cos z = w$. Por la fórmula del Teorema de la función inversa, obtenemos

$$(\arccos w)' = \frac{1}{-\operatorname{sen} g(w)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 g(w)}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{i\sqrt{w^2-1}} = -\frac{i}{\sqrt{w^2-1}}\,,$$

parecido a la fórmula para las funciones de una variable pero eligiendo el signo del seno de forma diferente y usando el valor principal $\sqrt{-1} = i$. ■

¿Cómo determinaríamos una fórmula explícita para $\arccos z$? Podemos aplicar el método empleado en el Ejercicio 4, obteniendo la siguiente fórmula:

$$\arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

en un dominio elegido adecuadamente. Nótese que la derivada de esta función coincide con la hallada en el Ejercicio 9.

Preparado por Dragan Vukotić, UAM