Variable Compleja I (Curso 2022-23, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Propina: Aplicacion del Teorema de los residuos al cálculo de integrales impropias de funciones reales

Este año, este tema supone una lectura optativa y no entra en los temas del examen final.

El cálculo de residuos es muy efectivo para evaluar ciertas integrales impropias de funciones racionales, combinaciones de racionales y trigonométricas y otras. Debido a la falta de tiempo, este año veremos sólo algunos de los muchos tipos de integrales que se pueden calcular por este método.

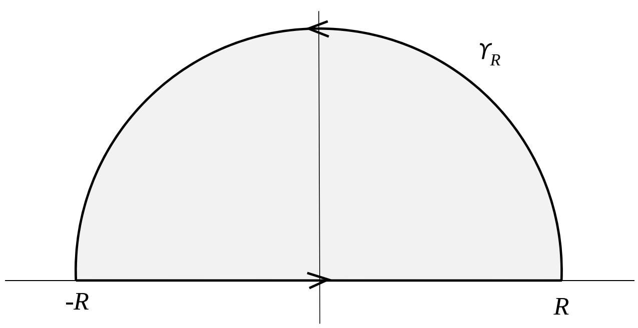
Para calcular una integral impropia: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, normalmente consideramos la función compleja $f(z)$ (u otra muy similar y relacionada con ella) y la integramos a lo largo de un contorno convenientemente elegido. Un contorno básico y usado con frecuencia es el contorno γ_R compuesto por el intervalo $I_R = [-R, R]$ y por una semicircunferencia, C_R, desde R hasta $-R$, situada o bien en el semiplano superior o bien en el inferior, con la siguiente idea:

(1) para evaluar $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{I_R} f(z)\,dz$, identificamos las singularidades aisladas en el dominio interior a γ_R y usamos el Teorema de los residuos (o, en algunos casos especiales cuando hay sólo una singularidad aislada dentro del contorno, la Fórmula integral de Cauchy);

(2) observamos que $\lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} f(z)\,dz = I$;

(3) demostramos que, cuando $R \to +\infty$, la integral $\int_{C_R} f(z)\,dz$ tiende a cero;

(4) pasando al límite cuando $R \to +\infty$, obtenemos finalmente el valor de la integral I.



Si la función $f(x)$ involucra alguna función trigonométrica, por ejemplo, $\cos x$, conviene reemplazar esa parte de la función por e^{ix} y hacer las modificaciones correspondientes en la función compleja $f(z)$.

Si nos encontramos con algún polo u otro tipo de singularidad de f en el contorno básico γ_R, entonces será necesario modificar un poco el contorno para evitar que éste pase por las singularidades (por ejemplo, reemplazando una parte del segmento I_R por una semicircunferencia pequeña). A veces es incluso conveniente considerar otro contorno diferente (un rectángulo u otro) pero no trataremos aquí estos ejemplos.

Empezaremos por unas estimaciones para integrales a lo largo de curvas que son semicircunferencias de radios grandes. Esta observación es fundamental en los cálculos de distintas integrales reales impropias por métodos de variable compleja.

Ejercicio 1. *Sea C_R la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior, centrada en el origen, recorrida desde R hasta $-R$. Demuestre que*

$$\int_{C_R} \frac{z+3}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

SOLUCIÓN. □ Necesitamos una cota superior, M, para la función $1/(z^2+1)^2$ en C_R. Por tanto, debemos acotar el denominador $(z^2+1)^2$ inferiormente. Sólo nos interesan los valores grandes de R, con lo cual podemos suponer que $R > 1$.
Cuando z pertenece a la semi-circunferencia C_R, cumple la condición $|z| = R$. Aplicando una de las formas de la desigualdad triangular: $|a-b| \geq |a| - |b|$, con $a = z^2$, $b = -1$, obtenemos

$$|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1 > 0.$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{|z^2+1|^2} \leq \dfrac{1}{(R^2-1)^2}$ y luego

$$\left|\frac{z+3}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{|z|+3}{|z^2+1|^2} \leq \frac{R+3}{(R^2-1)^2}.$$

Finalmente,

$$\left|\int_{C_R} \frac{z+3}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{R+3}{(R^2-1)^2}|dz| = \frac{R+3}{(R^2-1)^2}\,\ell(C_R) = \frac{\pi R(R+3)}{(R^2-1)^2}.$$

Puesto que $\lim_{R\to+\infty} \dfrac{\pi R(R+3)}{(R^2-1)^2} = 0$, se sigue que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \dfrac{z+3}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$. ■

El siguiente resultado generaliza el Ejercicio 1 y será útil en las próximas entregas de apuntes.

Lema 1. *Si P y Q son dos polinomios tales que $\operatorname{gr} Q \geq \operatorname{gr} P + 2$, entonces*

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \to 0, \qquad R \to +\infty,$$

DEMOSTRACIÓN. □ La demostración es similar: si $\operatorname{gr} P = m$, $\operatorname{gr} Q = n$, para $|z| = R$ suficientemente grande tendremos que $|P(z)| \leq CR^m$ para cierta constante C, mientras que $|Q(z)| \geq KR^n$ para otra constante $K > 0$ (siendo el término principal dominante, como en la prueba de que $\lim_{z\to\infty} Q(z) = \infty$, vista en clase). Luego

$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \leq \frac{CR^m}{KR^n}\pi R = \frac{\pi C}{KR^{n-m-1}} \to 0, \qquad R \to +\infty,$$

puesto que, por hipótesis, $m - n - 1 \geq 1$. ■

Ejercicio 2. *Calcule la integral*

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz,$$

donde $R > 1$, $\gamma_R = I_R + C_R$, $I_R = [-R, R]$, C_R es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$ y la curva γ_R está orientada en el sentido positivo.

SOLUCIÓN. Puesto que $z^2+1=(z-i)(z+i)$, se observa que

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Por tanto, f es analítica en el conjunto abierto $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: z\neq \pm i\}$ y tiene dos polos dobles en el plano: $z=i$ y $z=-i$. Sin embargo, sólo el polo $z=i$ se encuentra en el interior de la curva γ_R (ya que, por un lado, $R>1$ y, por otro lado, el polo $z=-i$ está en el semiplano inferior). Hallamos el valor del residuo en $z=i$ según la fórmula para un polo doble, vista antes:

$$\operatorname{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}[(z-i)^2 f(z)]'=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}.$$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f;i)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Obsérvese que, alternativamente, podríamos haber usado la Fórmula integral de Cauchy para la derivada en lugar del Teorema de los residuos para obtener el mismo resultado. ■

Los cálculos como el del Ejercicio 2 serán muy importantes a la hora de evaluar diversas integrales impropias de funciones reales.

Antes de comenzar con cálculos de ciertas integrales impropias, conviene recordar que si $p\in\mathbb{R}$ y $c>0$, la integral impropia

$$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p>1$, tal y como se puede comprobar directamente (y se vio en su día en Cálculo I).

Ejercicio 3. *Compruebe la convergencia de la integral*

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y evalúela, usando el teorema de los residuos.

SOLUCIÓN. En primer lugar, la integral converge ya que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y ambas integrales convergen. La integral sobre el intervalo $[0,1]$ converge porque no es impropia sino una integral habitual de Riemann de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La convergencia de la integral impropia sobre el intervalo $(1,+\infty)$ se justifica fácilmente usando el *criterio de comparación*, ya que

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} < \frac{1}{x^4}, \qquad x > 1,$$

y $\int_1^\infty (1/x^4)\,dx$ converge.

Para calcular I, utilizaremos el método de los residuos. Consideraremos el contorno ya habitual: $\gamma_R = I_R + C_R$, donde $I_R = [-R,R]$ y C_R es la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$; le daremos a γ_R la orientación positiva, de modo que el intervalo I_R se recorrerá desde $-R$ hasta R y C_R, desde R hasta $-R$.

Cuando $R > 1$, la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ tiene un polo doble, a saber, $z = i$, dentro de γ_R. Usando el Teorema de los residuos, en el Ejercicio 2 hemos evaluado la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

Observemos que su valor es independientemente de R, siempre y cuando $R > 1$. Por otro lado, parametrizando el intervalo I_R simplemente como $z = x$, $-R \le x \le R$, obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

puesto que en los apuntes sobre intgrales de línea demostramos (véase el lema con dos polinomios) que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = 0.$$

Dado que $f(x) = 1/(x^2+1)^2$ es una función par, se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2I$$

y, por tanto, $I = \pi/4$. ■

El método de los residuos también es útil cuando tenemos una integral mixta, involucrando una función racional y otra trigonométrica. Primero necesitamos ver un resultado auxiliar que se usa con frecuencia.

Lema 2 *(Lema de Jordan). Para todo $R > 0$ se cumple la desigualdad*

$$0 < \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt < \frac{\pi}{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la *desigualdad de Jordan* vista en los cursos de Cálculo: $\operatorname{sen} t \ge \frac{2}{\pi} t$, para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y la simetría de la gráfica de la función $e^{-R\operatorname{sen} t}$ respecto a la recta vertical $t = \pi/2$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\,dt = \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) < \frac{\pi}{R}.$$

La positividad de la integral es obvia. ■

Ejercicio 4. *Sea C_R la semicircunferencia del ejemplo anterior. Demuestre que*

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

SOLUCIÓN. Por la desigualdad triangular, para $|z| = R > 0$ y R suficientemente grande (por ejemplo, $R > 2$ será suficiente), obtenemos $|(z-1)^2+1| \ge |z-1|^2 - 1 \ge (R-1)^2 - 1$. Escribiendo $z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, observemos también que en C_R se cumple

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t}| = e^{-R\operatorname{sen} t}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en C_R: $dz = Re^{it}\,dt$ y aplicando el Lema 2 de Jordan, obtenemos

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz\right| \le \int_{C_R} \left|\frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\right| |dz| \le \frac{R}{(R-1)^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt < \frac{\pi}{(R-1)^2-1} \to 0$$

cuando $R \to +\infty$. ■

Recordemos que, para dos funciones positivas f, $g : (a,+\infty) \to (0,+\infty)$, la notación $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, significa que el cociente $f(x)/g(x)$ tiene límite finito y no nulo cuando $x \to +\infty$. En este caso, las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen o divergen a la par, según el *criterio asintótico*.

Ejercicio 5. *Usando el teorema de los residuos, evalúe las siguientes integrales:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1},$$

comprobando previamente su convergencia.

Solución. La integral I es convergente. Primero observemos que $\left|\frac{\cos x}{(x-1)^2+1}\right| \le \frac{1}{(x-1)^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$, $\quad x \to \infty$. Dado que $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ converge, el *criterio asintótico* demuestra que converge la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+1}$ y entonces, según el *criterio de comparación*, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$ converge absolutamente. De manera análoga, se demuestra que converge absolutamente la integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$, mientras que la integral desde -1 hasta 1 de la misma función tiene valor finito, al ser la integral de una función continua en un intervalo finito y cerrado (el denominador no se anula). La comprobación es completamente similar para la integral del seno.
Una vez demostrada la convergencia, pasamos a la evaluación de las integrales usando el Teorema de los residuos. Integraremos la función convenientemente elegida (siguiendo la recomendación de sustituir una función trigonométrica básica por una exponencial relacionada):

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}$$

sobre el mismo contorno $\gamma_R = I_R + C_R$ que en los ejemplos anteriores. Hemos elegido esta función en lugar de una con funciones trigonométricas motivados por la conocida identidad de Euler: $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$. Esta elección de f simplificará los cálculos.
Determinemos las singularidades aisladas de f. Es fácil ver que $(z-1)^2+1=0$ si y sólo si $z-1=\pm i$, es decir, los ceros del denominador son $z = 1 \pm i$. Así obtenemos la factorización

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$$

De los dos polos simples de f, sólo $z = 1+i$ se encuentra dentro de γ_R, cuando R es suficientemente grande: $R > |1+i| = \sqrt{2}$. Es fácil calcular el residuo en este polo:

$$\operatorname{Res}(f;1+i) = \lim_{z\to 1+i}(z-1-i)f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{e^{iz}}{z-1+i} = \frac{e^{-1+i}}{2i}.$$

Según el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f;1+i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1+i}}{2i} = \pi e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1).$$

Una vez más, tenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

En el Ejercicio 4 ya hemos demostrado que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$, cuando $R \to +\infty$, utilizando el *lema de Jordan*. Finalmente, pasando al límite cuando $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{e}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en los dos extremos de la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\cos 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1} = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1. \qquad \blacksquare$$

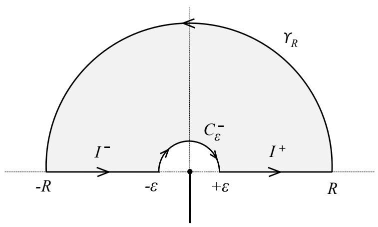
La complicación en el siguiente ejercicio reside en la necesidad de definir correctamente la función elegida como función analítica (es decir, hay que elegir un dominio conveniente para definir el logaritmo para que sea holomorfo), además de modificar el contorno.

Ejercicio 6. *Calcule la integral* $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$, *comprobando previamente su convergencia para todo* $p \in (-1,1)$.

SOLUCIÓN. Cerca de $x=0$, la función $x^p/(1+x^2) \sim x^p$ y la integral $\int_0^1 x^p\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Por tanto, la integral $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Cuando $x\to+\infty$, la función $x^p/(1+x^2) \sim 1/x^{2-p}$ y $\int_1^{+\infty} 1/x^{2-p}\,dx$ converge si y sólo si $p<1$. Conclusion I_p converge si y sólo si se $-1<p<1$.
Consideraremos la función $f(z)=z^p/(1+z^2)$, definida adecuadamente, partiendo de $z^p=e^{p\log z}$, con la siguiente determinación del logaritmo:

$$\log z=\ln|z|+i\arg z, \qquad z\in\Omega=\{z\in\mathbb{C}: -\pi/2<\arg z<(3\pi)/2\},$$

el plano menos el semieje imaginario negativo. Elegimos el siguiente contorno: $\gamma_{R,\varepsilon}$ en Ω: $\gamma_{R,\varepsilon}=C_R+I^-+C_\varepsilon^-+I^+$, donde R es grande y ε pequeño, $C_R=\{z=Re^{it}:\ 0\le t\le\pi\}$ es la semi-circunferencia de centro en el origen y radio R contenida en el semiplano superior, recorrida en el sentido positivo desde R hasta $-R$, $I^-=[-R,-\varepsilon]$ (intervalo en el semieje real negativo), $C_\varepsilon^-=\{z=\varepsilon e^{it}:\pi\ge\varepsilon\ge0\}$ es una semi-circunferencia contenida en el semiplano superior, de centro en el origen y radio ε y recorrida en el sentido negativo desde $-\varepsilon$, pasando por $i\varepsilon$, hasta ε (de ahí que normalmente se escriba $\pi\ge\varepsilon\ge0$ para indicar la dirección del movimiento) y, por fin, $I^+=[\varepsilon,R]$, un intervalo en el semieje real positivo. De esta forma el contorno, junto con el dominio interior que acota, se queda dentro del dominio Ω donde está definido el logaritmo complejo.



Nuestra función f es holomorfa en Ω, salvo en un polo simple, $z=i$, que se encuentra en el interior del contorno. Teniendo en cuenta que $i=e^{\pi i/2}$ y, por tanto, $i^p=e^{\pi i p/2}$, calculamos el residuo correspondiente:

$$\operatorname{Res}(f;i)=\frac{i^p}{2i}=\frac{\cos(\pi p)/2+i\,\operatorname{sen}(\pi p)/2}{2i}=\frac{e^{(\pi p i)/2}}{2i}.$$

Puesto que $p+1<2$ y $p+1>0$, vemos que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\le\pi R\cdot\frac{R^p}{R^2-1}\to0, \qquad R\to+\infty, \qquad \left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right|\le\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^p}{1-\varepsilon^2}\to0, \qquad \varepsilon\to0^+,$$

Para $z\in I^-$, tenemos $\log z=\ln(-x)+\pi i$. Con la determinación del logaritmo escogida, calculamos

$$z^p=e^{p\log z}=e^{p\ln(-x)+p\pi i}=e^{p\pi i}=(\cos(\pi p)+i\operatorname{sen}(\pi p))\cdot(-x)^p$$

$$\int_{I^-} f(z)dz=(\cos(\pi p)+i\operatorname{sen}(\pi p))\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{(-x)^p}{1+x^2}dx=(\cos(\pi p)+i\operatorname{sen}(\pi p))\int_\varepsilon^R\frac{x^p}{1+x^2}dx$$

(cambiando x por $-x$).
Puesto que $\int_{C_R} f(z)\,dz\to0$ cuando $R\to+\infty$ y $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ cuando $\varepsilon\to0^+$, obtenemos en el límite que

$$2\pi i\operatorname{Res}(f;i)=\pi e^{(\pi p i)/2}=\lim_{R\to+\infty,\,\varepsilon\to0^+}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz=e^{\pi p i}\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx.$$

Tomando las partes reales y usando la identidad $\cos(2x)+1=\cos^2 x$, obtenemos

$$\pi\cos\frac{\pi p}{2}=(\cos(\pi p)+1)\int_0^{+\infty}\frac{x^p\,dx}{1+x^2}=2\cos^2\frac{\pi p}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^p\,dx}{1+x^2},$$

Despejando la integral, se sigue que $I_p=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}$. ■

Cálculo de la transformada de Fourier mediante las técnicas complejas. En algunas asignaturas optativas como Variable Real o Probabilidad II suele verse el concepto de transformada de Fourier. Para una función $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que es absolutamente integrable: $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|\,dt < +\infty$, su *transformada de Fourier* se define como la función $\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-ixt}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier tiene diversas propiedades interesantes y aplicaciones en varios campos. No obstante, calcular explícitamente la transformada de Fourier de una función concreta suele ser una tarea no trivial en muchos casos y requiere un buen manejo de técnicas de integración. Presentamos aquí el cálculo de la transformada de Fourier de una función racional suave y absolutamente integrable utilizando los métodos estudiados en estos apuntes.

Ejercicio 7. *Calcule la transformada de Fourier,* $\widehat{u}(x)$, *de la función* $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

SOLUCIÓN. ☐ Hemos de calcular la integral $\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-ixt}\,dt$, para todo x real. El caso $x = 0$ es fácil:

$$\widehat{u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi\ .$$

Calculemos ahora $\widehat{u}(x)$ para un valor $x < 0$, integrando la función analítica de z, dada por $f(z) = \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}$, sobre el contorno $\gamma_R = C_R + I_R$ ya considerado en varios ejemplos anteriores. Al igual que en esos ejemplos, puede verse que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$. En efecto, escribiendo $z = a + ib$, $b \ge 0$ ($z \in C_R$), obtenemos

$$|f(z)| = \frac{\left|e^{-ixz}\right|}{|1+z^2|} = \frac{\left|e^{-ixa}e^{xb}\right|}{|1+z^2|} = \frac{e^{xb}}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z^2|-1} = \frac{1}{R^2-1}\,,$$

utilizando primero las hipótesis $x < 0$, $b \ge 0$ y luego la desigualdad triangular: $|1+z^2| \ge |z^2|-1$. Luego, por las estimaciones ya habituales, vemos que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{1}{R^2-1}\,\ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,.$$

Puesto que f sólo tiene un polo simple, $z = i$, dentro de γ_R ($R > 1$), el teorema de los residuos (o la fórmula de Cauchy) implica que

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f;i) = 2\pi i\,\frac{e^{-ix\cdot i}}{i+i} = \pi e^x\,.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos $\widehat{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \pi e^x$, para $x < 0$.
Integrando sobre el contorno simétrico respecto al eje real, compuesto por el mismo intervalo I_R y por la otra semi-circunferencia de radio R desde R hasta $-R$, pero ubicada en el semiplano inferior, con el polo de f en $-i$ esta vez, obtenemos $\widehat{u}(x) = \pi e^{-x}$, para $x > 0$. Resumiendo los tres casos en una fórmula, ahora podemos escribir:

$$\widehat{u}(x) = \pi e^{-|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

obteniendo la fórmula que se puede encontrar en diversos textos.

Preparado por Dragan Vukotić, profesor de la asignatura en varias ocasiones
Dibujos: Prof. José Pedro Moreno