Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2015-16

Segundo examen parcial, noviembre de 2015

(Turno de mañana) - SOLUCIONES

1. [2 puntos] Demuéstrese que la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{e^x + 1}.$$

tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0, 1)$. Si aplica un teorema, indique de qué teorema se trata y compruebe que se cumplen todas sus hipótesis.

Solución. La función f es una función elemental ya que es cociente de dos funciones elementales. El numerador está definido para todo $x \geq 0$ y el denominador no se anula nunca puesto que $e^x > 0$ para todo x. Por lo tanto, f es continua en todo punto $x \geq 0$ y, en particular, en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Obsérvese que en el punto $x = 0$ es continua sólo por la derecha pero eso es suficiente. Además,

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad f(1) = -\frac{1}{e+1} < 0\,.$$

Puesto que f cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$, deducimos que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

2. [4 puntos] Calcule razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x}\,,$$

mostrando todos los pasos seguidos.

Solución. Para empezar, se trata de una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ ya que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg}(x^2) = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0\,, \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 0 = 0\,.$$

Por tanto, es legítimo aplicar la regla de L'Hopital que, junto con la regla de la cadena, nos da lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arc\,tg}(x^2))'}{(\operatorname{sen}^2 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{(1+x^4)\cos x}\,.$$

Cada factor en el último producto tiene un límite fácil de calcular. Por un lado, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ (visto en clase; también se obtiene fácilmente, aplicando L'Hopital de nuevo). Por otra parte, vemos directamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^4)\cos x} = \frac{1}{(1+0)\cdot \cos 0} = 1\,.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} = 1\,.$$

3. [4 puntos] Consideremos la función

$$f(x) = (x^2 + 1)\, e^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determine razonadamente los intervalos de crecimiento y de convexidad, los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión de f (si los hubiera). Muestre todos los cálculos.

Solución. La función f es producto de dos funciones definidas y diferenciables en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, también es derivable en todo $\mathbb{R}$. Usando la regla del producto y la regla de la cadena, calculamos fácilmente su derivada, agrupando los términos en el último paso:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} = -(x^2-2x+1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}\,.$$

Puesto que la función exponencial es siempre positiva y $(x-1)^2 \geq 0$ (y, de hecho, es > 0 si $x \neq 1$), se sigue que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 1$. Por tanto, la función f es decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene ni máximos ni mínimos.

La segunda derivada (después de buscar los factores comunes) es

$$f''(x) = -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x} = (x-1)e^{-x}\,((x-1)-2) = (x-1)(x-3)e^{-x}\,.$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ sólo si $x = 1$ ó 3.
El factor e^{-x} es siempre positivo, así que el signo de la segunda derivada coincide con el del producto $(x-1)(x-3)$. Estudiando la positividad de este término de manera habitual, vemos que:

$f''(x) < 0$ si y sólo si $(x-1)(x-3) < 0$, es decir, si y sólo si $1 < x < 3$;

$f''(x) > 0$ si y sólo si $x < 1$ ó $x > 3$.

Por lo tanto, la función es convexa en cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y es cóncava en el intervalo $(1, 3)$. Por lo tanto, $x = 1$ y $x = 3$ son los puntos de inflexión.