Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2015-16

Primer examen parcial, octubre de 2015

(Turno de mañana) - SOLUCIONES

1. Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{n^2+7}-n^2)\,,$$

mostrando los pasos seguidos hasta obtener el resultado.

Solución. Aplicamos la racionalización, creando una fracción:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{n^2+7}-n^2) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n\sqrt{n^2+7}-n^2)(n\sqrt{n^2+7}+n^2)}{n\sqrt{n^2+7}+n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+7)-n^4}{n\sqrt{n^2+7}+n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{n\sqrt{n^2+7}+n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{7n}{\sqrt{n^2+7}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\frac{\sqrt{n^2+7}}{n}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}+1}\\ &= \frac{7}{2}\,.\end{aligned}$$

---

2. La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ viene dada de forma recurrente como sigue:

$$a_1=3\,,\qquad a_{n+1}=a_n+2\,,n\geq 1\,.$$

Demuestre por inducción que $a_n=2n+1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Solución. La afirmación es cierta para $n=1$ puesto que $a_1=2\cdot 1+1$.
Supongamos que para cierto $n\in\mathbb{N}$ se cumple $a_n=2n+1$ (hipótesis inductiva). Hemos de comprobar que entonces se cumple la afirmación correspondiente para $n+1$ en lugar de n:

$$a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3\,.$$

Usando la fórmula recurrente y la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$a_{n+1}=a_n+2=2n+1+2=2n+3\,,$$

que es lo que queríamos comprobar.
Por el Principio de inducción, queda probado que $a_n=2n+1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. Decida razonadamente si la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$$
converge o diverge. Nombre el criterio usado y explique cómo se ha aplicado.

Solución. Nuestra serie es de términos positivos. Teniendo en cuenta la presencia de una potencia n-ésima, parece indicado usar el criterio de la raíz (o de Cauchy). Éste nos dice que si existe

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

y $r < 1$, entonces la serie $\sum_n a_n$ converge y si $r > 1$ entonces la serie $\sum_n a_n$ diverge.

En este caso concreto,
$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{4^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{4} \to \frac{1}{4}, \qquad n \to \infty .$$

Puesto que $r = \dfrac{1}{4} < 1$, la serie converge.

Una solución alternativa pasaría por el uso del criterio del cociente (o de d'Alembert).