Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2015-16

Examen final: convocatoria ordinaria de enero de 2016 - SOLUCIONES

1. Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ diverge, converge condicionalmente o converge absolutamente. Razone la respuesta, nombrando los criterios usados y comprobando que se cumplen las condiciones para su aplicación.

Solución. Estudiemos primero la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie asociada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

de términos positivos. Es fácil ver que el término general de esta serie se comporta asintóticamente como $\frac{1}{n}$; en efecto,

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \to 1\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Según el Criterio asintótico (también llamado el Criterio del paso al límite), las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

se comportan de la misma manera. La segunda es la conocida serie armónica y, como hemos visto en clase, es divergente. Por lo tanto, la primera también es divergente.

Conclusión: la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ no converge absolutamente.

Estudiemos ahora si la serie inicial es convergente o no. Es evidente que se trata de una serie alternada, así que nos interesa comprobar si se cumplen las condiciones del Criterio de Leibniz para poder aplicarlo. Veamos:

$$\frac{n}{n^2+1} > 0\,, \qquad \frac{n}{n^2+1} \to 0\,, \quad n \to \infty\,,$$

así que sólo nos queda comprobar que la sucesión $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Eso se puede hacer de dos maneras:

1) Una es por definición, directamente, comprobando que se cumple la desigualdad

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}\,.$$

Ésta es equivalente a

$$n(n^2+2n+2) > (n+1)(n^2+1) \Leftrightarrow n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1 \Leftrightarrow n^2+n > 1\,,$$

lo cual es cierto para todo n natural.

2) La otra consiste en comprobar que la función $u(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$ (de hecho, es suficiente que lo sea en otro intervalo $(N, +\infty)$ para un $N \in \mathbb{N}$ fijo). Esto se comprueba fácilmente considerando su derivada:

$$u'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0\,, \qquad x > 1\,,$$

lo cual significa que u decrece en $(1, +\infty)$.
En resumen, se cumplen las tres condiciones exigidas por el Criterio de Leibniz, por lo cual nuestra serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ converge. Dado que ya hemos establecido que no converge absolutamente, se sigue que converge condicionalmente.

2. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 0, \\ e^x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en el punto $x = 0$.
b) Decida razonadamente si f es derivable o no en $x = 0$.

Solución. Para que f sea continua en $x = 0$, debe existir el límite finito $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y, además, éste debe ser igual al valor $f(0)$. Vamos a comprobar estas condiciones.
Primero comprobamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 0^2 + 1 = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1\,.$$

Puesto que coinciden, se sigue que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
Además, según la fórmula para $f(x)$, vemos que $f(0) = 0^2 + 1 = 1$.
Por tanto, f es continua en $x = 0$.

(b) Por definición,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}\,,$$

si el límite existe, así que lo más indicado es comprobar la derivabilidad en $x = 0$ estudiando la existencia de este límite. Para ello, estudiamos ambos límites laterales del mismo cociente diferencial.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h^2) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0\,,$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

(El último límite se vio en clase y puede calcularse por la Regla de L'Hopital, por ejemplo.) Dado que los límites laterales no coinciden, concluimos que no existe

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

y, por tanto, la función f no es derivable en $x = 0$.

Una solución alternativa, también aceptable, consistiría en comprobar los valores de la derivada de f a ambos lados de $x = 0$ según las fórmulas dadas:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0, \\ e^x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(Observemos que sería un error serio escribir que $f'(x) = 2x$ para $x \le 0$ puesto que aún no sabemos si existe o no la derivada en $x = 0$.) Por tanto,

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x = 0\,, \qquad f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1\,.$$

Dado que son valores distintos, no existe $f'(0)$.

3. Sea F la función

$$F(x) = \int_0^x (1 - 2t)\, e^{-t^2} dt\,.$$

(a) Estudie los intervalos de crecimiento/decrecimiento de F y sus puntos de máximo/mínimo, razonando la respuesta. Decida si los máximos/mínimos encontrados son globales o sólo locales.
(b) Estudie los intervalos de convexidad/concavidad de F y los puntos de inflexión.

Solución. (a) La función $f(t) = (1 - 2t)\, e^{-t^2}$ es continua en cualquier intervalo $[0, x]$, así que el (Segundo) Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función F es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$F'(x) = (1 - 2x)\, e^{-x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y los puntos de máximo o mínimo de F, estudiamos el signo de su derivada, F'. Puesto que la función exponencial tomo sólo valores positivos, sabemos que

$$e^{-x^2} > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

así que el signo de F' coincide con el de la función $1 - 2x$. Ésta se anula en $x = 1/2$, es positiva para $x < 1/2$ y negativa para $x > 1/2$. Se sigue que F es creciente en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y decreciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$ y, por tanto, tiene un máximo absoluto (global) en $x = \frac{1}{2}$.

(b) Calculamos la segunda derivada de F usando la fórmula para F' obtenida en el apartado (a), la Regla del producto y la Regla de la cadena:

$$F''(x) = \Big((1 - 2x)\, e^{-x^2}\Big)' = (-2)\, e^{-x^2} + (1 - 2x)\,(-2x)\, e^{-x^2} = 2\, e^{-x^2}(2x^2 - x - 1)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Es obvio que $2\, e^{-x^2}$ es siempre positivo, así que $F'(x) = 0$ cuando $1 + x - 2x^2 = 0$, $F'(x) > 0$ cuando $2x^2 - x - 1 > 0$ y $F'(x) < 0$ cuando $2x^2 - x - 1 < 0$.
Factorizamos el polinomio $P(x) = 2x^2 - x - 1$ de cualquiera de las maneras vistas en clase, o bien observando que $P(1) = 0$ y luego diviendo el polinomio P por $x - 1$ por el procedimiento de Ruffini, o bien resolviendo la ecuación cuadrática $2x^2 - x - 1 = 0$, obteniendo $x = 1$ ó $x = -1/2$, así que

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + \frac{1}{2})\,.$$

Ahora por el procedimiento habitual con las desigualdades determinamos que $2x^2 - x - 1 < 0$ cuando $-1/2 < x < 1$ y $2x^2 - x - 1 > 0$ en los intervalos $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(1, +\infty)$.

Por consiguiente, F es cóncava en $(-1/2, 1)$ y convexa en cada uno de los intervalos $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(1, +\infty)$. Debido al cambio de signo de la segunda derivada en los puntos $x = -1/2$ y $x = 1$, ambos son puntos de inflexión.

4. (a) Halle el polinomio de Taylor de grado 16 de la función

$$f(x) = (1 - x^8)\, e^{-x^8}$$

centrado en $a = 0$.
(b) Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^8)\, e^{-x^8} ,$$

justificando la respuesta.

Solución. (a) Partimos de la fórmula para la serie de Taylor de la función exponencial que aparece en la portada del examen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Sustituyendo $-x^8$ en lugar de x en la fórmula, obtenemos

$$e^{-x^8} = 1 - x^8 + \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{18}}{6} + \dots , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Multiplicando por $(1 - x^8)$, obtenemos la serie de Taylor de f:

$$f(x) = (1 - x^8)(1 - x^8 + \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{18}}{6} + \dots) = 1 - 2x^8 + \frac{3}{2}x^{16} + \dots$$

centrada en $x = 0$. Truncando la serie después del término x^{16}, obtenemos el polinomio de Taylor de f de grado 16:

$$P_{16}(x) = 1 - 2x^8 + \frac{3}{2}x^{16} .$$

(b) Observando que

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^8)\, e^{-x^8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^8}{e^{x^8}} ,$$

que es un límite indeterminado de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$, podemos aplicar la Regla de L'Hopital (y después la Regla de la cadena) para obtener

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^8)\, e^{-x^8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^8}{e^{x^8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8x^7}{8x^7 e^{x^8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^{x^8}} = 0 .$$

5. Calcule razonadamente el valor exacto de la integral

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx .$$

Muestre los detalles del cálculo y explique qué técnicas de integración se han usado.

Solución. Al menos dos soluciones son posibles.

(1) Primero hacemos el cambio de variable (sustitución) natural:

$$\ln x = t\,, \qquad dt = \frac{dx}{x}\,.$$

Cuando $x = e$, tenemos que $t = \ln e = 1$ y cuando $x = e^2$, $t = \ln e^2 = 2\ln e = 2$. Por lo tanto,

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int_1^2 \ln t\,dt = (t\ln t - t)|_1^2 = 2\ln 2 - 1\,,$$

donde la integral $\int \ln t\,dt$ se puede calcular por partes, tal y como hicimos en clase:

$$\ln t = u\,, \quad dt = dv\,, \qquad \frac{dt}{t} = du\,, \quad t = v\,,$$

obteniendo

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int 1\,dt = t\ln t - t + C\,.$$

(2) La integral se puede calcular por partes directamente (sin pasar por un cambio de variable), eligiendo

$$u = \ln(\ln x)\,, \qquad dv = \frac{dx}{x}\,.$$

Luego (usando la Regla de la cadena, la integración básica y el hecho de que $x > 0$ al estar en el intervalo (e, e^2)):

$$du = \frac{dx}{x\,\ln x}\,, \quad v = \ln|x| = \ln x\,,$$

obteniendo

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \ln x\ln(\ln x)|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \ln x|_e^{e^2} = 2\ln 2 - 1\,,$$

donde hemos usado el simple cálculo: $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2\ln e = 2$.