Conjuntos y Números

LISTA 1 CURSO 2019-20

1) Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos: $1 + 2 + \cdots + n$. Y otra para la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética: $a + kd,\ k = 0, 1, \ldots$

2) Halla la suma de las n primeras potencias de r: $r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$. Halla una fórmula general para la suma de las n primeros términos de una progresión geométrica cr^k, $k = 0, 1, \ldots$

3) Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados. *Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman* π **radianes.**

4) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural n sea divisible por 6.

a) n es divisible por 3;
b) n es divisible por 12;
c) $n = 24$;
d) n^2 es divisible por 6;
e) n es par y divisible por 3;
f) n es par o divisible por 3.

5) Escribir el enunciado de la afirmación recíproca y de la contraposición de la siguiente afirmación: *Si estudio mucho y el examen resulta fácil, obtendré buena nota.*

6) Explica por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$, y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.

7) En las siguientes proposiciones, x, y son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.

a) $\forall x\, ((x > 0) \Rightarrow \exists y\, ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
b) $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
c) $\exists x\, (1 < x^2 < x)$
d) $\forall y\, \exists x\, ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$

8) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

9) Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.

a) $\forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x\, \forall y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$.

b) $\exists x\, \forall y,\ x < y < x + 2$ y $\forall x\, \exists y,\ x < y < x + 2$.

10) ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones en los números naturales? Escribir su negación.

a)$\forall x\, \exists y,\ y < x$

b) $\exists x\, \forall y,\ \forall z, x < z < y$

11) a) Demuestra por reducción al absurdo que $\log_3(1215)$ es irracional.

b) Demostrar por reducción al absurdo que los números

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \qquad \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

son irracionales. (Sugerencia: si x es racional, también lo es su cuadrado.)

12) Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma a^2 donde a es un número natural. Demuestra que si un número natural $n > 0$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.

13) Demostrar por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

14) a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$.
b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$.
c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.

15) Sean $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 7$ y $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Utilizando inducción, demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la fórmula

$$a_n = 1 + 2^n + 2(-1)^n.$$

16) Probar por inducción que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

17) Demostrar que $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

18) Demostrar, para todo $q \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}} - 1}{q-1}.$$

19) Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

20) Para cada número natural n, sea $A_n = [-\frac{2}{n+1}, \frac{4n-1}{3n}]$. Determinar $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

21) Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios S, T, U y V.
(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$
b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$
c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

22) Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$. Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

23) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

$$\{e\} \subset \{e, \{e^2\}\}, \qquad \emptyset \subset \{e, \{\emptyset\}\}.$$

24) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

25) Sean A, B, C conjuntos dados tales que $B \subset A$. Describir en cada caso los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones:

i) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, si sabemos que $A \subset C$.

ii) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$, si sabemos que $A \cap C = \varnothing$.