Variable Compleja II, Curso 2023-24

(4º de Grado en Matemáticas y de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 5 de problemas

Lema de Schwarz; la continuación del tema de aplicaciones conformes

1) Sea f una función holomorfa en un dominio Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y con valores en ese mismo dominio. Supongamos que en Ω hay dos puntos a, b, $a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Pruebe que entonces f es la función identidad.

Ayuda: Pase a $\mathbb{D}$.

2) Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa no constante. Pruebe que:

a) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

b) $|f'(w)| \leq \dfrac{1 - |f(w)|^2}{1 - |w|^2}$, $\forall w \in \mathbb{D}$.

Ayuda: Aplique el Lema de Schwarz a $\phi_a \circ f$ (1$^{\text{er}}$ apartado) o a $\phi_b \circ f \circ \phi_a$ (2º apartado) con $a, b \in \mathbb{D}$ apropiados en cada caso, donde $\phi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo conforme del disco definido por $\phi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Conviene observar que $\phi_a \circ \phi_a$ es la identidad así que, por ejemplo, $f = \phi_a \circ (\phi_a \circ f)$.

3) Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, además, $f(0) = 1$. Usando una transformación de Möbius y el Lema de Schwarz, pruebe que:

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

4) Supongamos que f una función holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H}$ y tal que toma valores en $\mathbb{H}$, $(f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H})$. Probar que si $z, w \in \mathbb{H}$ entonces

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{f(z) - \overline{f(w)}} \right| \leq \left| \frac{z - w}{z - \overline{w}} \right| .$$

5) Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano complejo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y sea f una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ sobre Ω. Sea ahora g una función holomorfa en $\mathbb{D}$ con valores en Ω y tal que $g(0) = f(0)$. Probar que

$$\max_{|z| \leq r} \{|g(z)|\} \leq \max_{|z| \leq r} \{|f(z)|\}$$

para cada r, $0 \leq r < 1$.
Ayuda: Considerar la función $f^{-1} \circ g$.

6) Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$, la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

envía $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.

b) Toda aplicación holomorfa y biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que fija el origen es una rotación.

Ayuda: Usar el lema de Schwarz.

c) Toda aplicación holomorfa y biyectiva f de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ es una de las aplicaciones descritas en el primer apaartado.
Ayuda: Componer f con una transformación de Möbius S apropiada y aplicar (b) a $S \circ f$.

7) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$ y $T(-1) = \infty$.

8) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica y $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ una función armónica tales que la composición $g \circ f$ está definida en Ω. Demostrar que $g \circ f$ es armónica.

9) a) Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dos puntos del plano complejo y $t \in (0, +\infty)$. Utilizando las aplicaciones conformes, demostrar que el conjunto

$$\mathcal{C}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z - \lambda_1|}{|z - \lambda_2|} = t \right\}$$

es una circunferencia (o recta, si $t = 1$). Se llama *la circunferencia de Apolonio.* Determinar explícitamente esta circunferencia.

b) Sean λ_1, λ_2 como antes, y sean α, β dos arcos de (distintas) circunferencias tales que λ_1 y λ_2 son extremos de cada uno de estos arcos. Sea $E \subset \mathbb{C}$ el dominio de Jordan, cuya frontera es $\alpha \cup \beta$. Sea $\mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ el interior de $\mathcal{C}(\lambda_1, \lambda_2, t)$, donde $t \in (0, 1)$. Encontrar la fórmula para la aplicación conforme, que lleva el dominio $\mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, t) \cap E$ (acotado por tres arcos circulares) al disco unidad.

10) Sean $A^2 + B^2 = 1$, donde $A, B > 0$. Sea I el interior de la rama derecha de la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$. Encontrar una aplicación conforme del semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ sobre el dominio $I \setminus [1, +\infty)$.

11) Sean $A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = 1$, donde $A_j, B_j > 0$, $A_1 < A_2$. Sea F el dominio comprendido entre las ramas derechas de las hipérbolas $x^2/A_j^2 - y^2/B_j^2 = 1$, $j = 1, 2$. Encontrar una aplicación conforme del disco unidad sobre F.

12) Sean $0 < a < b$ y sea E el exterior de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (incluyendo el punto infinito de la esfera de Riemann). Encontrar una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre

a) E; **b)** $E \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$; **c)** $E \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; **d)** $E \setminus \left(\{\infty\} \cup \left\{z \neq 0 : \frac{3\pi}{2} \leq \arg z \leq 2\pi\right\}\right)$;
e) $E \setminus (-\infty, -a)$.

13) Sea γ una curva arbitraria de Jordan en el plano (no se presupone ningún tipo de diferenciabilidad de γ, solo la continuidad). Sea A el interior de γ y sea $\phi : \gamma \to \mathbb{R}$ una función continua, definida en el soporte de la curva γ.

a) Demostrar que *el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } A \\ u = \phi & \text{en } \gamma \end{cases}$$

siempre tiene una solución $u \in C^2(A) \cap C(A \cup \gamma)$.
Ayuda: Utilizar el teorema de Riemann sobre la aplicación conforme y el teorema de Carathèodory.

b) Demostrar que esta solución es única.
Ayuda: Utilizar una de las variantes del Principio de módulo máximo.