Variable Compleja II, 2023-24

Problemas. Hoja 4.

1. Si A, B son subconjuntos cerrados del plano complejo $\mathbb{C}$, definimos la distancia $\rho(A,B)$ entre ellos mediante la fórmula
$$\rho(A,B) = \inf_{a\in A,\, b\in B} |a-b|.$$

   (a) Supongamos que $A, B \subset \mathbb{C}$ son cerrados, y $A \cap B = \emptyset$. ¿Se puede afirmar que $\rho(A,B) > 0$? ¿Y si sabemos que A, B son compactos?

   (b) Responder a la misma pregunta si sólo se sabe que los conjuntos A, B son cerrados, $A \cap B = \emptyset$, y que (al menos) uno de ellos es compacto.

   (c) Investiga si es cierta la desigualdad triangular: $\rho(A,C) \le \rho(A,B) + \rho(B,C)$ para tres conjuntos cerrados cualesquiera $A, B, C \subset \mathbb{C}$.

2. Sea K, $K \subset \mathbb{C}$, un conjunto compacto. Ponemos
$$\rho(z,K) = \inf_{w\in K} |z-w|.$$

   (a) ¿Se puede escribir $\min$ en vez de $\inf$ en esta definición?

   (b) Demostrar que la función $\rho(z,K)$ es continua en todo el plano.
   Sugerencia: Demostrar que $\big|\rho(z_1,K) - \rho(z_2,K)\big| \le |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3. *(Continuación de los ejercicios 1 y 2)*. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio, $K \Subset \Omega$, y $\varepsilon > 0$. Definimos
$$K_\varepsilon := \big\{z \in \mathbb{C} : \rho(z,K) \le \varepsilon\big\}.$$
   Demostrar que K_ε es un compacto. Demostrar que existe un ε positivo tal que $K_\varepsilon \Subset \Omega$.

4. (a) Comprobar que $f_n(z) = \frac{nz^{n+1}}{1-z^2}$ no converge uniformemente en el disco unidad $\mathbb{D}$, pero sí converge uniformemente en todo $K \Subset \mathbb{D}$.

   (b) Demuestra que $\operatorname{tg} nz \rightrightarrows -i$ en cada $K \Subset \Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z < 0\}$.

5. Demostrar el *criterio de Cauchy* para la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos: $f_n \rightrightarrows_K$ (a alguna función f), para cada $K \Subset \Omega$, si y sólo si
$$\forall K \Subset \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m,n \ge N\ \forall z \in K \quad |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon\,.$$

6. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos(nz)\,, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\operatorname{sen}(nz)\,.$$
   Demostrar que f, $g \in \operatorname{Hol}(\Omega)$.

7. Demuéstrese que la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ es holomorfa, tanto en el disco unidad como en el dominio exterior $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

8. Sea Ω simplemente conexo. Demostrar la siguiente afirmación: una sucesión $\{f_n\}$ de funciones en $\operatorname{Hol}(\Omega)$ converge a f uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω si y sólo si $f_n \rightrightarrows f$ en cada circunferencia $C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| = r\} \subset \Omega$.

9. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad en el plano complejo y

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \ |f(z) - \frac{1}{1-z^2}| < 1 \text{ para todo } z \text{ en } \mathbb{D}\}\,.$$

Demostrar que $\mathcal{F}$ es una familia normal en $\mathbb{D}$.

10. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad en el plano complejo y

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \ |f(z)\cdot(1-z)^2| \leq 1 \text{ para todo } z \in \mathbb{D}\}\,.$$

¿Es $\mathcal{F}$ una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$? Razonar la respuesta.

11. Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad en el plano complejo y

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \ |f'(z)\cdot(1+z^2)| \leq 1, \text{y} \ \ |f(0)| \leq a \text{ para todo } z \in \mathbb{D}\}\,,$$

donde a es una constante. ¿Es $\mathcal{F}$ una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$?

12. **(a)** Determina si la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \ : \ |f''(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \ f(0) = 0\}$$

es una familia compacta (normal y cerrada).

(b) ¿Cuál es la respuesta en el caso $\quad \mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \ : \ |f''(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \ f(0) = f'(0) = 0\}$?

13. Demostrar que, dado cualquier dominio Ω, la siguiente familia de funciones es normal.

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\Omega) : |f(z) - e^z| \leq |z|^5 \text{ en } \Omega\}$$

14. Comprobar que $\quad \mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : |f(0)| \leq 1 \ \text{ y } \ |f'(z)| \leq 1 + |z|^2\,, \forall z \in \mathbb{D}\}$
es una familia normal.

15. Supongamos que todas las funciones de la familia $\mathcal{F} = \{f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ cumplen la siguiente condición:

$$0 < |f_n(z) - n| < 1\,, \quad \text{para todo } z \in \Omega \ \text{ y para todo } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

¿Es $\mathcal{F}$ una familia normal?

16. Probar que la familia de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ y tales que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2} \ \text{ para todo } \ z \in \mathbb{D}\,, \qquad f(0) = 0$$

es compacta (normal y cerrada) en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

17. Sea Ω un dominio simplemente conexo, $a \in \Omega$. Definamos

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hol}(\Omega) : \ \mathrm{Re}\, f(z) > 0\,, \text{ para todo } z \in \Omega\,; f(a) = 1\}\,.$$

Demostrar que $\mathcal{F}$ es una familia no vacía y normal en $\mathrm{Hol}(\Omega)$.

18. Sea $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ una familia normal. Determinar si es normal la familia

$$\mathcal{G} = \{h(z) = e^z f(z) - \frac{g^2(z)}{1-z} : f, g \in \mathcal{F}\}\,.$$

19. Demostrar que si $\mathcal{F}$ es una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ entonces la familia $\mathcal{F}' = \{f' : \ f \in \mathcal{F}\}$ es también normal.

20. Comprobar que el recíproco del ejercicio anterior no es cierto. ¿Podríamos añadir alguna hipótesis adicional sobre la familia $\mathcal{F}$ para concluir que, en este caso, si $\mathcal{F}'$ es normal entonces $\mathcal{F}$ es también una familia normal?