Variable Compleja II, 2023-24

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Integrales definidas calculadas con métodos de la variable compleja

En los siguientes problemas 1-7 se pide calcular las siguientes integrales, utilizando los métodos de la variable compleja.

1. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2};$

2. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx,$ (b) p.v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx.$

   En ambas integrales $a, b > 0$.

3. (a) p.v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10},$ (b) p.v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}.$

4. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

5. (a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0 < p < 1);$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x^p\,dx$ $(p > 1).$

6. (a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^p\,dx}{1+x^2}$ $(-1 < p < 1);$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x\,dx}{x^2+a^2}$ $(a > 0).$

7. $(a > 0)$ (a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log^2 x\,dx}{x^2+1};$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x\,dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}.$

8. *(la transformada de Fourier de la función gaussiana)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < +\infty$. Su *transformada de Fourier* se define como

$$\big(\mathcal{F}f\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx.$$

Se supone que esta integral tiene sentido. Podemos entenderla como una integral impropia de Riemann, suponiendo que $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$. En el contexto de la teoría de la integral de Lebesgue tenemos que pedir que f sea Lebesgue integrable.

Aplicando la fórmula conocida $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ y los métodos de la variable compleja, demostrar que la transformada de Fourier de la función gaussiana $\gamma(x) = e^{-x^2}$ es

$$\big(\mathcal{F}\gamma\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{t^2}{4}}\,.$$