Variable Compleja II, Curso 2023-24

Hoja 2 de problemas
Aplicaciones conformes

En los siguientes problemas denotaremos por $\mathbb{D}$ al disco unidad y por $\mathbb{H}$ al semiplano superior. Es decir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

1) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

2) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$; **e)** $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

3) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ y $T(0) = 3 + 2i$,

4) Sean a y b dos constantes positivas y sea $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Sea H_a la rama derecha de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a$ y sea $H_{b,\theta}$ la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = b$, rotada el ángulo θ.

a) Demostrar que H_a y $H_{b,\theta}$ se intersecan exactamente en un punto.

b) Calcular este punto.

c) ¿Cuál es el ángulo de intersección de las curvas H_a y $H_{b,\theta}$?

Ayuda: Utilizar una aplicación conforme adecuada.

5) Verificar que $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ es una aplicación holomorfa y biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ donde Ω es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq -1/4, \operatorname{Im} z = 0\}$.
Ayuda: $k(z) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right)$.

6) Sea Ω el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| > 4, |z + 5| > 4\}$. Encontrar una transformación de Möbius que lleve Ω sobre el conjunto $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < R\}$ para algún R, determinando exactamente R.

7)* Supongamos que f es una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en el cuadrado $\Omega = \{z : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y que satisface $f(0) = 0$.

a) Probar que f satisface la siguiente relación de simetría: $f(i\,z) = i\,f(z)$, para cada $z \in \mathbb{D}$.

b) Probar también que si el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de 0 es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ entonces $c_n = 0$ para todo n tal que $n - 1$ no sea múltiplo de 4.

8) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$.

9) Encuentre una transformación de Möbius T tal que $T(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1/2\})$ es de la forma $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < h\}$, calculando el valor exacto de h.

10) Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 en los siguientes casos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\,,\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{H}$.

b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z < 0\,,\ |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

e) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

f) $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0,1)$ y $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

11) Hallar dos transformación de Möbius T_1 y T_2 tales que $T_i(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ para $i = 1, 2$, y además verifiquen:

$$T_1(1/2) = 1/3, \qquad T_2(i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad T_2(-i) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

12) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc > 0$, la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

envía $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$.

b) Toda aplicación holomorfa y biyectiva f de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ es una de las aplicaciones descritas en el apartado anterior.