Variable Compleja II, 2023-24

HOJA 1 DE PROBLEMAS - REPASO

Funciones derivables. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Compruébese que la función $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto y que, por tanto, es una función entera. Escribiendo $z = x + yi$, ¿de qué función $f(z)$ se trata?

2. Si una función compleja f tiene derivada en todo el plano y satisface la *ecuación de Cauchy*:

$$f(z+w) = f(z) + f(w)\,, \qquad z\,, w \in \mathbb{C}\,,$$

demuéstrese que $f(z) = az$ para algún número complejo fijo a. (*Sugerencia*: utilícese la definición de la derivada.)

Dominios. Curvas rectificables. Integrales de línea

3. Esbozar el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \, |z| < 1\,, |z - 1/2| > 1/2\}$ y razonar si es simplemente conexo o no.

4. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. ¿De qué curva γ se trata? Calcúlese la integral

$$\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Series de potencias

5. Hállese el disco de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(z-2)^n\,, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{4m}}{9^m}\,, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m^{\sqrt{m}}}\,.$$

6. Comprobar rigurosamente que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ define una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ pero diverge en un conjunto denso de la circunferencia unidad, a saber, en

$$\{e^{2\pi i k/2^n} : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \le 2^n\}\,.$$

7. Desarrollar en serie de potencias (en $\mathbb{D}$) la función $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ de dos maneras:

   (a) calculando los coeficientes de Taylor;

   (b) partiendo de la suma de alguna serie conocida.

8. (a) Hallar todas las funciones enteras que satisfacen

$$f(2z) = 2f(z), \qquad \text{para todo } \; z \in \mathbb{C}.$$

(b) Hallar todas las funciones holomorfas en $\mathbb{D} = \{z : \; |z| < 1\}$ que satisfacen

$$f(z^2) = f(z) + z, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{$*$}$$

¿Existe una función entera que satisface $(*)$?

Principio de los ceros aislados. Principio de la unicidad

9. Sea f es una función entera tal que $f(z) = f(z^2)$ para todo z. Demostrar que $f \equiv cte$.

10. Hallar todas las funciones analíticas en el disco $D(1,1) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| < 1\}$ tales que

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

11. Encontrar todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ que cumplan la condición

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\cos(\pi n)\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Justificar la respuesta rigurosamente.

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

12. Si f y g son enteras y $|f(z)| < |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ¿qué relación existe entre ambas funciones?

13. Sea f una función entera cumple la desigualdad $|f(z)| \leq |z|^{\pi-2}|e^z|$ para todo z tal que $|z| \geq 1$. Demostrar que existen números complejos a, b tales que $f(z) = (az+b)e^z$.

¿Qué condiciones tienen que satisfacer a y b para que realmente se cumpla esta desigualdad?

14. Sea f una función entera que verifica la condición $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuéstrese que f es constante.

15. (a) Probar que $f(\mathbb{C})$, la imagen del plano por una función entera y no constante, jamás puede estar contenida en un semiplano.

(b) Demostrar que, cuando f es entera y no constante, su recorrido $f(\mathbb{C})$ no puede estar contenido en ningún dominio de tipo $\mathbb{C} \setminus D(a;r)$ y que, por tanto, $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

16. Sea P un polinomio de grado k al menos 2 y con ceros distintos $z_1, z_2, \dots, z_k$. Ponemos $R = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_k|\}$. Probar que

(a) $$\lim_{T\to\infty} \int_{|z|=T} \frac{1}{P(z)}\, dz = 0.$$

Deducir que

(b) $$\int_{|z|=T} \frac{1}{P(z)}\, dz = 0, \qquad \text{si } T > R.$$

Deducir del teorema de los residuos y de (b) que

(c) $$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{P'(z_j)} = 0.$$

Resíduos y sus aplicaciones

17. Para cada una de las siguientes funciones, encontrar sus singularidades aisladas y los correspondientes resíduos:

$$(a) \quad \frac{1}{z^5 - z^2}; \qquad (b) \quad \frac{\sin 2z}{(1+z^2)^2}; \qquad (c) \quad \tan^2 z.$$

18. Calcular las integrales:

$$(a) \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)}\, dz; \qquad (b) \quad \int_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\, dz; \qquad (c) \quad \int_{|z|=5} \frac{z\, dz}{\sin z(1-\cos z)},$$

donde $r > 0$ y las circunferencias tienen orientación positiva.

Teorema de Rouché

19. **(a)** Deduce del teorema de Rouché que las 11 soluciones de $z^{11} + z^3 - z^2 + 3z - 2024 = 0$ están en el disco $\{|z| < 2\}$.

    (b) Demuestra que todas estas soluciones están en el anillo $\{1 < |z| < 2\}$.

20. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $z^5 + 9z^4 + 5\cos(z) = 0$ en el disco unidad $|z| < 1$?

21. **(a)** Demuestra que el polinomio $P(z) = z^6 + 20z^3 + 30z + 1$ no tiene raíces en las circunferencias $|z| = 1$, $|z| = 2$ y $|z| = 3$.

    (b) Calcula el número de raíces de este polinomio en el disco $|z| < 1$ y en los anillos $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < 3$.