Variable Compleja II, 2023-24

Examen final ordinario, 24 de mayo de 2024

Para obtener la nota máxima, basta presentar soluciones completas de 4 problemas

1) (2,5 puntos) Sea $p(z)$ un polinomio, que no tiene raíces en el disco unidad cerrado $|z| \leq 1$ y satisface $|p(z)| < 1$ en este disco.

(a) Comprobar que está definida una rama holomorfa $f(z) = \sqrt{p(z)}$ en el disco $|z| \leq 1$ (de hecho, en un disco abierto más grande $|z| < 1 + \epsilon$, donde $\epsilon > 0$).
(b) Fijando esta rama holomorfa, demostrar que para cualquier $n \geq 5$, la ecuación

$$2z^n - z^{n-5} = f(z)$$

tiene exactamente n raíces en el disco $|z| \leq 1$.

---

2) (2,5 puntos) Calcular las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 4}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\log(x)\, dx}{x^4 + 4}.$$

---

3) (2,5 puntos)

(a) Encontrar una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(1) = -1$. ¿Cuántas transformaciones de Möbius existen con estas propiedades?
(b) Calcular la imagen $\varphi(C)$, donde $C = \{z : |z| = 1\}$ es la circunferencia unidad.
(c) Sean $-1 < a < 0$ y $b > 1$. Sea C_1, C_2 las circunferencias en el plano complejo, cuyos diámetros son, respectivamente, los subintervalos $[a, b]$ y $[a^{-1}, b^{-1}]$ del eje real. Sea $C = \{z : |z| = 1\}$. Demostrar que la intersección $C_1 \cap C_2 \cap C$ consiste exactamente de dos puntos.

---

4) (2,5 puntos)

(a) Sea Ω un dominio en el plano complejo y sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones holomorfas en Ω. Demostrar que la familia de funciones $\{e^f : f \in \mathcal{F}\}$ también es normal en Ω.
(b) Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathrm{Hol}(\Omega)$ tal que la familia $\{e^f : f \in \mathcal{F}\}$ es normal. ¿Se sigue que $\mathcal{F}$ es normal? Dar una demostración o un contraejemplo.

---

5) (2,5 puntos)

(a) ¿Para qué valores de $a < b$ es la función $g(z) = e^z$ univalente en la banda $\Pi_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$? En estos casos, determinar la imagen $g(\Pi_{a,b})$.
(b) Sean $0 < A < B$. Utilizar el apartado anterior para encontrar explícitamente una aplicación conforme del disco unidad sobre el dominio simplemente conexo, acotado por las parábolas $x = A^2 - \dfrac{y^2}{4A^2}$ y $x = B^2 - \dfrac{y^2}{4B^2}$.