Variable Compleja II, 2023-24

Examen parcial 2, 7 de mayo de 2024

9:30 - 11:20

1) (3 puntos) Sea f una función entera.

(a) Supongamos que las funciones $\{f(nz) : \; n = 1, 2, 3, \ldots\}$ forman una familia normal de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Demostrar que $f = \mathrm{const}$.
(b) Demostrar que las funciones $\{f(z+n) : \; n \in \mathbb{Z}\}$ forman una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ si y solo si

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \le a} |f(z)| < +\infty$$

para todo $a > 0$. Encontrar una función entera $f \ne \mathrm{const}$ tal que esta condición se cumple.

---

2) (3 puntos) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $|f_n(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo n. Supongamos que para todo $k \ge 0$,

$$f_n^{(k)}(0) \to c_k \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostrar que

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k$$

representa una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f_n(z) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$ uniformemente sobre compactos en $\mathbb{D}$.

Ayuda: Utilizar los argumentos del Teorema de Vitali.

---

3) (3 puntos) Sea f una función holomorfa de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$.
(a) Demostrar que para todo par de puntos z, w en $\mathbb{D}$,

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}} \right| \le \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|.$$

(b) Supongamos que 0 es un cero de f de orden $n \ge 1$. Demostrar que $|f(z)| \le |z|^n$, $z \in \mathbb{D}$.
(c) Supongamos que $w \in \mathbb{D}$ es un cero de f de orden $n \ge 1$. Demostrar que

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}} \right| \le \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

---

4) (3 puntos) Sean θ_1, θ_2 ángulos tales que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Sea Ω el dominio en el plano, cuya frontera consiste de las ramas derechas de las hipérbolas

$$\Big\{x + iy : \; x, y \in \mathbb{R}, \; \frac{x^2}{\cos^2\theta_j} - \frac{y^2}{\sin^2\theta_j} = 1\Big\}, \quad j = 1, 2.$$

Sea $\Omega^- = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z < 0\}$. Expresar explícitamente aplicaciones conformes de Riemann del disco unidad sobre Ω y sobre Ω^-.