Variable Compleja II, 2023-24

Examen parcial 2, 7 de mayo de 2024, 9:30 - 11:20

Soluciones

1) (3 puntos) Sea f una función entera.

(a) Supongamos que las funciones $\{f(nz): \ n = 1, 2, 3, \dots\}$ forman una familia normal de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Demostrar que $f = \text{const}$.
(b) Demostrar que las funciones $\{f(z+n): \ n \in \mathbb{Z}\}$ forman una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ si y solo si

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| \le a} |f(z)| < +\infty$$

para todo $a > 0$. Encontrar una función entera $f \neq \text{const}$ tal que esta condición se cumple.

Solución: (a) Ya que la familia de funciones $\{f(nz) : n \in \mathbb{N} \dots\}$ es localmente acotada, es uniformemente acotada sobre cualquier compacto, en particular, sobre el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$. Luego existe una constante C tal que

$$|f(nz) \le C, \quad |z| \le 1, \, n \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras, $|f| \le C$ sobre el disco $|z| \le n$, para cualquier n. Estos discos cubren el plano, luego $|f| \le C$ en todo el plano $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, f es constante.

(b) Supongamos primero que f satisface $\sup_{|\operatorname{Im} z| \le a} |f(z)| < +\infty$ para todo $a > 0$. Sea $K \subset \mathbb{C}$ cualquier compacto. La función $\operatorname{Im} z$ alcanza el máximo y el mínimo en K, por ser una función continua. Luego existe un número $a > 0$ tal que K se contiene en la banda $\{|\operatorname{Im} z| \le a\}$. Por tanto, para todo n,

$$\sup_K |f(z+n)| \le \sup_{|\operatorname{Im} z| \le a} |f(z+n)| = \sup_{|\operatorname{Im} z| \le a} |f(z)| < \infty.$$

Se sigue que la familia de funciones $\{f(z+n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es localmente acotada, es decir, normal.
Supongamos ahora que la familia $\{f(z+n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es localmente acotada. A cualquier número $a > 0$ le corresponde una constante $C_a < \infty$ tal que $|f(z+n)| \le C_a$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo z en el rectángulo $R_a = \{x + iy : x \in [0,1], y \in [-a, a]\}$ (este rectángulo es un compacto). Todo w con $|\operatorname{Im} w| \le a$ se representa como $w = z + n$, donde $z \in R_a$ y $n \in \mathbb{Z}$. Luego $|f(w)| \le C_a$ para todo w tal que $|\operatorname{Im} w| \le a$. Esto demuestra la otra implicación.

---

2) (3 puntos) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ tal que $|f_n(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo n. Supongamos que para todo $k \ge 0$,

$$f_n^{(k)}(0) \to c_k \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostrar que

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k$$

representa una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f_n(z) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$ uniformemente sobre compactos en $\mathbb{D}$.

Ayuda: Utilizar los argumentos del Teorema de Vitali.

Solución 1: Durante la demostración del Teorema de Vitali, vimos el siguiente

Lema Sea $\{v_n\}$ una sucesión acotada de números complejos. Entonces o bien esta sucesión converge a un número complejo, o bien existen dos números complejos $a \neq b$ y dos subsucesiones $\{v_{m_s}\}$, $\{v_{\ell_s}\}$ de la sucesión $\{v_n\}$ tales que $v_{m_s} \to a$ y $v_{\ell_s} \to b$ cuando $s \to \infty$.

Siguiendo la demostración del Teorema de Vitali, veamos primero que para todo $t \in \mathbb{D}$, existe el límite de $f_n(t)$. Efectivamente, fijamos $t \in \mathbb{D}$. Si no existe el límite finito de $\lim_{n \to \infty} f_n(t)$, entonces, según el lema anterior, hay dos sucesiones de índices $\{m_s\}$, $\{\ell_s\}$ y dos números distintos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f_{m_s}(t) \to a$ y $f_{\ell_s}(t) \to b$

cuando $s \to \infty$. La familia de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada sobre todo el disco $\mathbb{D}$, luego es normal. Por tanto, podemos encontrar subsucesiones $\{M_s\}$ y $\{L_s\}$ de las sucesiones $\{m_s\}$ y $\{\ell_s\}$ y funciones $g, h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tales que $f_{M_s} \to g$ y $f_{L_s} \to h$ uniformemente sobre compactos en $\mathbb{D}$ cuando $s \to \infty$. Aplicando el teorema de Weierstrass, vemos que $g^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) = c_k$ para todo $k \geq 0$. Por el teorema de unicidad, $g = h$. Esto contradice a que los valores de las funciones f_{M_s} y f_{L_s} en el punto t tienen límites distintos cuando $s \to \infty$ (a y b, respectivamente).
La contradicción demuestra que para todo $t \in \mathbb{D}$, existe un límite finito $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Vimos en clase otro lema que decía lo siguiente (para el caso del disco): si $\{f_n\}$ forman una familia normal en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ y el límite de $f_n(t)$ existe para un conjunto de los t's, denso en el disco unidad, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos a una función f holomorfa en $\mathbb{D}$. Aplicando Weierstrass, obtenemos que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k,$$

lo que termina la prueba.

Solución 2: Sea $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} z^k$ el desarrollo de Taylor de f_n. Sea $0 < r < 1$. Según la fórmula de Cauchy, $a_{k,n} = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=r} z^{-k-1} f_n(z)\, dz$. Como $|f_n| \leq 1$ en $\mathbb{D}$, obtenemos

$$|a_{k,n}| \leq (2\pi)^{-1} 2\pi r \cdot r^{-k-1} = r^{-k}$$

para k, n cualesquiera. Pasando al límite cuando $r \to 1$, obtenemos que $|a_{k,n}| \leq 1$ para todos los valores de k, n. Según la hipótesis, para cualquier k, $a_{k,n} = f_n^{(k)}(0)/k! \to a_k := c_k/k!$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $|a_k| \leq 1$ para todo k. Luego la serie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge en $\mathbb{D}$ y representa en $\mathbb{D}$ una función holomorfa.
Fijamos un $\epsilon > 0$ y un $r \in (0,1)$. Si $|z| \leq r$, podemos estimar $|f_n(z) - f(z)|$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| = \Big| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k,n} - a_k) z^k \Big| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_{k,n} - a_k|\, |z|^k + \sum_{k=N}^{\infty} \big(|a_{k,n}| + |a_k|\big) |z|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_{k,n} - a_k| + \sum_{k=N}^{\infty} 2r^k = \sum_{k=0}^{N-1} |a_{k,n} - a_k| + \frac{2r^N}{1-r}. \end{aligned}$$

Elijamos $N = N(\epsilon, r)$ tal que $2r^N/(1-r) < \epsilon/2$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k$ para cada k, existe un M tal que $\sum_{k=0}^{N-1} |a_{k,n} - a_k| < \epsilon/2$ para todo $n > M$ (porque se trata de una suma finita). Luego

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad |z| \leq r,\ n > M.$$

Esto demuestra que las funciones f_n tienden uniformemente a f sobre compactos en $\mathbb{D}$.

---

3) (3 puntos) Sea f una función holomorfa de $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$.
(a) Demostrar que para todo par de puntos z, w en $\mathbb{D}$,

$$\Big| \frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}} \Big| \leq \Big| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \Big|.$$

(b) Supongamos que 0 es un cero de f de orden $n \geq 1$. Demostrar que $|f(z)| \leq |z|^n$, $z \in \mathbb{D}$.
(c) Supongamos que $w \in \mathbb{D}$ es un cero de f de orden $n \geq 1$. Demostrar que

$$\Big| \frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}} \Big| \leq \Big| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \Big|^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Solución: **(a)** Fijamos un $w \in \mathbb{D}$. Sea $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-z\bar{a}}$. Tenemos que demostrar que

$$\big|(\varphi_{f(w)} \circ f)(z)\big| \leq |\varphi_w(z)|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Si ponemos $t = \varphi_w(z)$, entonces $t \in \mathbb{D}$ cuando $z \in \mathbb{D}$, y $z = \varphi_w(t)$. Luego basta demostrar que

$$\big|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(t)\big| \le |t|, \quad t \in \mathbb{D}.$$

Si ponemos $g = \varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w$, entonces tenemos que demostrar que $|g(t)| \le |t|$, $t \in \mathbb{D}$. Esto se sigue del Lema de Schwarz, porque $|g| \le 1$ en $\mathbb{D}$ y $g(0) = \varphi_{f(w)}(f(w)) = 0$.

(b) Por la hipótesis, $g(z) := z^{-n} f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Está claro que $|g(z) \le r^{-n}$ si $|z| = r < 1$. Por el principio del módulo máximo, también se cumple $|g(z) \le r^{-n}$ si $|z| \le r < 1$. Si fijamos un $z \in \mathbb{D}$, podemos aplicar esta desigualdad a todo $r \in \big[|z|, 1\big)$. Pasando al límite cuando $r \to 1$, obtenemos que $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego $|f(z)| = |z^n|\,|g(z)| \le |z|^n$, $z \in \mathbb{D}$.

(c) Usando el desarrollo de Taylor de f en w, vemos que por la hipótesis, $|f(z)| \le C|z - w|^n$ en un entorno de w. Luego $|f(z)| \le C'|\varphi_w(z)|^n$ en este entorno, donde $C' = C(1 + |w|)^n$. Haciendo el cambio $z = \varphi_w(t)$, se obtiene $|f \circ \varphi_w(t)| \le C'|t|^n$ para t en un entorno de 0. Luego $f \circ \varphi_w(t)$ tiene un cero de orden al menos n en $t = 0$. Como $|f \circ \varphi_w| \le 1$ en $\mathbb{D}$, por el apartado b),

$$|f \circ \varphi_w(t)| \le |t|^n, \quad t \in \mathbb{D}.$$

Luego $|f(z)| \le |\varphi_w(z)|^n$, $z \in \mathbb{D}$. Es la desigualdad que había que demostrar.

---

4) (3 puntos) Sean θ_1, θ_2 ángulos tales que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Sea Ω el dominio en el plano, cuya frontera consiste de las ramas derechas de las hipérbolas

$$\Big\{x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}, \ \frac{x^2}{\cos^2\theta_j} - \frac{y^2}{\sin^2\theta_j} = 1\Big\}, \quad j = 1, 2.$$

Sea $\Omega^- = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z < 0\}$. Expresar explícitamente aplicaciones conformes de Riemann del disco unidad sobre Ω y sobre Ω^-.

Solución: **a)** Se conoce que para $0 < \theta < \pi/2$, la función de Joukowski lleva el rayo $\{z \ne 0 : \arg z = \theta\}$ en la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 1$. Como esta función es conforme en $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, es conforme también en el ángulo

$$A_{\theta_1,\theta_2} = \{z \ne 0 : \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$$

y lo lleva en el dominio Ω. La aplicación de Riemann de $\mathbb{D}$ a Ω se obtiene como la composición de las sigientes apicaciones conformes:

$$\mathbb{D} = \{s : \ |s| < 1\} \xrightarrow{t(s)} \{\operatorname{Re} t > 0\} \xrightarrow{u(t)} \Big\{u \ne 0 : \ |\arg u| < \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\Big\} \xrightarrow{z(u)} A_{\theta_1,\theta_2} \xrightarrow{w(z)} \Omega,$$

donde las fórmulas para las aplicaciones conformes son

$$t(s) = \frac{i - s}{i + s}, \quad u(t) = t^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi}}, \quad z(u) = e^{i\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}}\, u, \quad w(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}\,.$$

b) Sea $z = re^{i\theta}$ la representación polar de un punto $z \in A_{\theta_1,\theta_2}$. Entonces

$$w(z) = \frac{r + r^{-1}}{2}\cos\theta + i\,\frac{r - r^{-1}}{2}\sin\theta.$$

Como $0 < \theta < \pi/2$, se sigue que $\operatorname{Im} w(z) \ge 0$ si $r \ge 1$ e $\operatorname{Im} w(z) < 0$ si $0 < r < 1$. Como la función de Joukowski $w(z)$ es conforme de A_{θ_1,θ_2} a Ω, es conforme también del sector circular

$$S_{\theta_1,\theta_2} = \Big\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, \ \theta_1 < \arg z < \theta_2\Big\}$$

a Ω^-. La aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ sobre S_{θ_1,θ_2} se busca de forma estándar, lo que da lugar a la siguiente secuencia de aplicaciones conformes:

$$\mathbb{D} = \{|s| < 1\} \xrightarrow{t_1(s)} \{\operatorname{Im} t_1 > 0\} \xrightarrow{v(t_1)} A_{0,\pi/2} \xrightarrow{\sigma(v)} S_{-\pi/2,\pi/2} \xrightarrow{z(\sigma)} S_{\theta_1,\theta_2} \xrightarrow{w(z)} \Omega^-,$$

donde

$$t_1(s) = it(s) = i\,\frac{i-s}{i+s}, \quad v(t_1) = t_1^{1/2}, \quad \sigma(v) = \frac{i-iv}{1+v}, \quad z(\sigma) = e^{i\,\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}\sigma^{\frac{\theta_2-\theta_1}{\pi}}, \quad w(z) = \frac{z+z^{-1}}{2}.$$

La composición de estas aplicaciones conformes es la aplicación de Riemann de $\mathbb{D}$ sobre Ω^-. El sector $S_{-\pi/2,\pi/2}$ es un ejemplo del "dominio lunar", por lo que fórmula para la aplicación $\sigma(v)$ se encontró, invirtiendo la aplicación de Möbius $v(\sigma) = \frac{i-\sigma}{i+\sigma}$, que lleva $S_{-\pi/2,\pi/2}$ en el primer cuadrante $A_{0,\pi/2}$.
Las potencias $t^{\frac{\theta_2-\theta_1}{\pi}}$, $\sigma^{\frac{\theta_2-\theta_1}{\pi}}$ y $t_1^{1/2}$ en las fórmulas anteriores se definen utilizando la rama principal del argumento.