Variable Compleja II, 2023-24

Examen parcial 1, 9 de abril de 2024

9:30 - 11:20

1) (3 puntos) Se consideran circunferencias $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$, que son tangentes en el origen.

(a) Demuestre que se puede colocar un número infinito de circunferencias C_n en la región comprendida entre C_2 y C_1 de tal manera que cada uno de ellas es tangente a C_1, C_2 y a la siguiente (en puntos distindos del origen).
(b) Demuestre que los centros de todas las cirunferencias colocadas pertenecen a la misma circunferencia. Encontrar esta circunferencia.

Ayuda: Mediante una transformación de Möbius apropiada, transformar la región entre C_1 y C_2 en una región para la cual la solución sea sencilla.

---

2) (6 puntos) Calcular las siguientes integrales con los métodos de la variable compleja:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+x+1}; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(x^2+b^2)^2}.$$

Aquí $a, b > 0$.

---

3) (3 puntos) Sean $A, B > 0$.

(a) Demuestre que las parábolas $x = A^2 - \dfrac{y^2}{4A^2}$ e $y = B^2 - \dfrac{x^2}{4B^2}$ tienen exactamente dos puntos de intersección.
(b) Hallar estos dos puntos.

Ayuda: Considerar una aplicación holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que lleva ciertas rectas en las parábolas de este tipo. ¿Cuántas antiimágenes por f tiene un punto genérico del plano? Hallar las antiimágenes de las dos parábolas por f y utilizarlas en la solución.