Variable Compleja I Curso 2016-17

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado)

Parcial 2
Jueves 11 de mayo

1) a) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $\log(1+z) = (z-2)^4 - z$ en el disco $|z-2| \leq 2$? ¿Cuántos de estos ceros son reales? Aquí tomamos la rama principal del logaritmo.

b) Supongamos que las funciones f y g_n $(n \geq 1)$ son holomorfas en un dominio que contiene el disco $|z| \leq 1$. Se conoce que f no se anula en la circunferencia $|z| = 1$ y que $\{g_n(z)\}$ tienden uniformemente a $f(z)$ en el disco $|z| \leq 1$. Demostrar que existe un índice N tal que para todo $n \geq N$, las funciones g_n y f tienen el mismo número de raíces en $|z| \leq 1$ (contadas con sus multipicidades).

2) Utilizando métodos de la variable compleja, calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$.

3) Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Encontrar todas las funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n-1}\right), \quad n = 2, 3, \ldots;$

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n-1}\right), \quad n = 2, 3, \ldots .$

4) a) Enunciar el teorema sobre la existencia y la unicidad del desarrollo de una función holomorfa en serie de Laurent.

b) Desarrollar la función $f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2}$ en una serie de Laurent, centrada en el punto 1. ¿Para qué valores de z converge esta serie?